

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO TECNOLÓGICO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROJETO DE GRADUAÇÃO**

**BRUNO MUNIZ DE FREITAS MIOTTO**

**OTIMIZAÇÃO DE UM SISTEMA DE COGERAÇÃO PELA  
UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DE PONTOS INTERIORES**

VITÓRIA

2016

**BRUNO MUNIZ DE FREITAS MIOTTO**

**OTIMIZAÇÃO DE UM SISTEMA DE COGERAÇÃO PELA  
UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DE PONTOS INTERIORES**

Projeto de graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Ferreira Martins

VITÓRIA

2016

**BRUNO MUNIZ DE FREITAS MIOTTO**

**OTIMIZAÇÃO DE UM SISTEMA DE COGERAÇÃO PELA  
UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DE PONTOS INTERIORES**

Projeto de graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

COMISSÃO EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. Márcio Ferreira Martins  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
Orientador

---

Prof. Mr. Leonardo Rodrigues de Araújo  
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
Examinador Externo

---

Prof. Dr. José Joaquim Conceição Soares Santos  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
Examinador Interno

## DEDICATÓRIA

Aos familiares, amigos, alunos e aos professores da Engenharia Mecânica.

## **AGRADECIMENTO**

À minha família, pelo apoio incondicional, paciência e carinho mesmo nos momentos mais difíceis.

Aos professores da Engenharia Mecânica na UFES, principalmente ao meu orientador Márcio Martins e aos professores José Joaquim Santos e João Luiz Marcon Donatelli, pelos ensinamentos e disponibilidade de ajudar que tornaram este trabalho possível.

Às amigas feitas ao longo do curso, por todos os momentos especiais que passamos nesta jornada e por me apoiarem em todas as dificuldades.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Sistema de cogeração do problema CGAM.....	21
Figura 2 – Temperaturas na Caldeira de Recuperação .....	24
Figura 3 - Desvio da Função Objetivo ao longo da otimização – Caso 1 .....	40
Figura 4 - Nº de avaliações da Função Objetivo ao longo da otimização – Caso 1.....	40
Figura 5 – Razão de compressão x avaliações da função objetivo – Caso 1.....	42
Figura 6 – Eficiência isentrópica do compressor x avaliações da função objetivo – Caso 1...	42
Figura 7 - Eficiência isentrópica da turbina x avaliações da função objetivo – Caso 1 .....	43
Figura 8 – Temperatura de entrada da câmara x avaliações da função objetivo – Caso 1 ....	43
Figura 9 - Temperatura de saída da câmara x avaliações da função objetivo – Caso 1 .....	44
Figura 10 - Desvio da Função Objetivo ao longo da otimização – Caso 2 .....	45
Figura 11 - Nº de avaliações da Função Objetivo ao longo da otimização – Caso 2.....	45
Figura 12 - Razão de compressão x avaliações da função objetivo – Caso 2.....	46
Figura 13 - Eficiência isentrópica do compressor x avaliações da função objetivo – Caso 2 .	47
Figura 14 - Eficiência isentrópica da turbina x avaliações da função objetivo – Caso 2 .....	47
Figura 15 - Temperatura de entrada da câmara x avaliações da função objetivo – Caso 2 ...	48
Figura 16 - Temperatura de saída da câmara x avaliações da função objetivo – Caso 2 .....	48
Figura 17 - Desvios de $r_c$ comparado às outras variáveis de decisão – Caso 1 .....	49

**LISTA DE TABELAS**

Tabela 1- Parâmetros para o modelo econômico do problema CGAM.....	27
Tabela 2 - Limites superior e inferior das variáveis de decisão .....	38
Tabela 3 - Valores iniciais das variáveis de decisão.....	38
Tabela 4 - Valores iniciais para os parâmetros arbitrários .....	39
Tabela 5 - Valores ótimos das variáveis - Caso 1.....	41
Tabela 6 - Custos associados aos equipamentos e ao combustível – Caso 1 .....	41
Tabela 7 - Valores ótimos das variáveis - Caso 2.....	46
Tabela 8 - Custos associados aos equipamentos e ao combustível – Caso 2 .....	46
Tabela 9 - Sensibilidade da função objetivo em função das variável de decisão .....	50

## SIMBOLOGIA

### Abreviaturas

MPI Método dos pontos interiores

### Maiúsculas

C Constantes de custos do problema CGAM

$\epsilon_{tol}$  Tolerância do problema

F Filtro

FRC Fator de recuperação de capital

L Lagrangiano da função objetivo

M Massa molar

P Pressão

$\Delta P$  Perda de carga

PCI Poder calorífico inferior

$\dot{Q}$  Calor útil

R Constante do gás

T Temperatura

W Trabalho

$W_k$  Hessiano do Lagrangiano da função objetivo

X Matriz diagonal de x (MPI)

Z Matriz diagonal de z (MPI)

Z Custo de aquisição dos equipamentos (CGAM)



## Minúsculas

$c(x)$	Restrições com variáveis de folga
$c_p$	Calor específico
$d$	Direção de procura
$e$	Exergia
$f$	Relação combustível-ar (CGAM)
$f(x)$	Função objetivo (MPI)
$g(x)$	Restrições de desigualdade
$h$	Entalpia (CGAM)
$h(x)$	Restrições de igualdade (MPI)
$\dot{m}$	Vazão mássica
$m$	Número de restrições
$n$	Número de variáveis de restrição
$r_c$	Relação de pressão
$s$	Variáveis de folga (MPI)
$s$	Entropia (CGAM)
$t$	Tempo de funcionamento do sistema
$x$	Variáveis de decisão
$y$	Multiplicador de Lagrange para as restrições de igualdade
$z$	Variáveis de fronteira

## Gregas

$\varphi$	Problema barreira
$\mu$	Parâmetro de barreira
$\theta$	Violação das restrições
$\eta$	Eficiência isentrópica
$\phi$	Multiplicador para o custo de manutenção
$\lambda$	Multiplicadores de Lagrange
$\Lambda$	Matriz diagonal dos multiplicadores de Lagrange
$\Delta$	Região de confiança
$\sigma$	Parâmetro sigma
$\Sigma_k$	Matriz diagonal de sigma
$\Sigma_\mu$	Erro de optimabilidade
$\alpha$	Tamanho do passo
$\tau$	Parâmetro para controlar o passo
$\nu$	Parâmetro de penalidade

## RESUMO

Atualmente, com a crescente preocupação pela preservação do meio ambiente, com recursos naturais cada vez mais escassos, e uma crescente demanda de energia elétrica mundial, aumentam a importância de que os sistemas energéticos sejam mais eficientes. Este trabalho visa apresentar e discutir os procedimentos e resultados obtidos na otimização de um sistema de cogeração de pequeno porte através da aplicação do algoritmo do método dos pontos interiores. O objetivo do projeto é verificar a potencialidade de aplicar o método em questão para a solução de problemas de otimização em sistemas térmicos. Portanto, os resultados apresentados neste trabalho são apenas o primeiro passo para atingir esse objetivo. Inicialmente, introduzem-se os conceitos básicos de sistemas de cogeração com a finalidade de demonstrar o funcionamento do processo que será estudado. Logo em seguida, é apresentado o histórico da otimização termoeconômica e do método dos pontos interiores, mostrando também a teoria por trás do algoritmo. Após a teoria, o trabalho introduz toda a modelagem (física, termodinâmica e econômica) do problema CGAM (VALERO *et al.*, 1994a), um famoso sistema de cogeração apresentado na década de 1990 para comparar as metodologias de cada um de seus autores ao resolver um problema pré-definido e simples de otimização. Com a modelagem apresentada, demonstra-se então o algoritmo utilizado em dois programas desenvolvidos no software MATLAB: um apresenta o algoritmo explicitamente, enquanto o outro utiliza a função pré-existente do software *fmincon*, que também aplica o método dos pontos interiores. Os resultados obtidos por ambos os programas são comparados entre si e com os resultados originais dos autores do problema CGAM, para poder concluir se o método é viável para a otimização de problemas de engenharia não lineares.

**Palavras-chave:** Sistemas térmicos; Cogeração; Otimização Termoeconômica; Método dos Pontos Interiores

## ABSTRACT

Nowadays, with the growing worry about environmental preservation, with the scarcity of natural resources and an ever-growing energy demand worldwide, the importance of more efficient thermal systems is rising. This work aims to present and discuss the procedures and results obtained in the optimization of a small-scale cogeneration system via the application of the interior point method. The objective of this project is to verify the potentiality of the interior point method in solving optimization problems in thermal systems. Therefore, the results presented in this work are nothing more than the first step towards this goal. Initially, basic concepts of cogeneration systems are introduced, with the goal of demonstrating how the process that is the focus of this article works. Then it is presented a brief discussion of the historical background of the thermoeconomic optimization and of the interior point method, along with an explanation of the theory behind the method. Finished with the theory, the article introduces the models (physical, thermodynamic and economic) of the CGAM problem (VALERO *et al.*, 1994a), a famous cogeneration system presented in the 1990s to compare the methodologies of each author, by solving a predefined and simple problem of optimization. With the models presented, it is demonstrated the algorithm utilized in each code, developed using the software MATLAB: one program has the algorithm explicit, while the other utilizes the pre-existing function of the software, `fmincon`, which also applies the interior point method. The results obtained by each program are compared between them and with the conventional solution presented by the problem's authors, so it is possible to conclude the feasibility of the method for solving non-linear engineering problems.

**Key-words:** Thermal Systems; Cogeneration; Thermoeconomic Optimization; Interior Point Method

## SUMÁRIO

1. Introdução .....	1
1.1. Motivação .....	1
1.2. Objetivos .....	2
1.3. Ferramentas .....	2
1.4. Organização do trabalho.....	2
2. Revisão bibliográfica .....	4
2.1. Sistemas de cogeração .....	4
2.1.1. Conceito.....	4
2.1.2. Ciclos de cogeração.....	4
2.1.2.1. Ciclo Rankine com cogeração .....	4
2.1.2.1. Ciclo combinado com cogeração .....	5
2.1.2.2. Ciclo Brayton com cogeração .....	5
2.1.3. Equipamentos do ciclo brayton com cogeração.....	5
2.1.3.1. Turbina a gás.....	6
2.1.3.2. Caldeira de recuperação.....	6
2.1.3.3. Pré-aquecedor de ar .....	7
2.2. Otimização.....	7
2.3. Otimização termoeconômica.....	8
2.4. Método dos pontos interiores.....	10
2.4.1. Histórico .....	10
2.4.2. Algoritmo básico do método.....	11
2.4.3. Aproximação pelo método das barreiras logarítmicas.....	11
2.4.4. Solução do problema barreira .....	13
2.4.5. Redução do parâmetro de barreira .....	15
2.4.6. Critério de parada.....	15

2.4.7.	Possíveis adições ao algoritmo .....	16
2.4.8.	Limites superiores e inferiores gerais .....	16
2.4.9.	Inicialização.....	17
2.4.10.	Função de mérito .....	17
2.4.11.	Método do filtro .....	18
2.4.12.	Correção de segunda ordem.....	19
3.	Sistema CGAM.....	20
3.1.	Variáveis de decisão .....	22
3.2.	Modelo físico.....	22
3.3.	Modelo termodinâmico.....	25
3.4.	Modelo econômico.....	26
3.5.	Função objetivo.....	27
3.6.	Restrições de desigualdade.....	28
4.	Algoritmos dos programas.....	30
4.1.	Programa “Fmincon” .....	30
4.1.2.	Algoritmo do programa.....	30
4.1.3.	Composição do programa.....	32
4.1.4.	Rotina Principal .....	32
4.1.5.	Rotina FuncObj .....	32
4.1.7.	Rotina RestDesig .....	33
4.1.8.	Rotina PrintProb .....	33
4.2.	Programa “Explícito” .....	33
4.2.1.	Algoritmo do programa.....	33
4.2.2.	Composição do programa.....	34
4.2.3.	Rotina Principal .....	34
4.2.4.	Rotina Otimizar.....	35
4.2.5.	Rotina CriarObjGrad.....	35

4.2.6.	Rotina CriarRestJac .....	35
4.2.7.	Rotina CriarHess .....	35
4.2.8.	Rotina Jacob .....	35
4.2.9.	Rotina Phi.....	36
4.2.10.	Rotina Resíduo .....	36
4.2.11.	Rotina Theta.....	36
4.2.12.	Rotina Soc.....	36
4.2.13.	Rotina TesteFiltro .....	36
4.2.14.	Rotina PrintProb .....	36
5.	Resultados .....	38
5.1.	Considerações iniciais .....	38
5.2.	Resultados para o caso 1 .....	39
5.3.	Resultados para o caso 2 .....	42
5.4.	Análise de sensibilidade.....	49
6.	Considerações finais .....	51
6.1.	Sugestões para trabalhos futuros .....	52
7.	Referências bibliográficas.....	53

# 1. INTRODUÇÃO

Num mundo com recursos naturais cada vez mais limitados, o aumento incessante da demanda energética para o desenvolvimento dos países e a preocupação com a preservação do meio ambiente vêm fazendo com que sejam imprescindíveis sistemas energéticos cada vez mais eficientes. Buscando o aumento da eficiência, o projeto de um sistema térmico esbarra em aspectos econômicos antes de alcançar os limites termodinâmicos, já que os sistemas mais eficientes tendem a demandar maiores investimentos iniciais, fazendo necessário um ponto de equilíbrio (otimização do projeto). Em sistemas já existentes é importante definir estratégias operacionais mais eficientes de forma a atender a demanda energética com o menor custo possível (otimização operacional) e identificar as ineficiências devido à degradação dos equipamentos para planejar a manutenção (diagnóstico). Na cogeração, que é umas das formas de aumentar a eficiência de sistemas térmicos, são necessárias técnicas de partição dos custos para o calor e para a potência (alocação de custos) (SANTOS, 2009). Este trabalho busca a otimização operacional de um sistema de cogeração.

## 1.1. MOTIVAÇÃO

A motivação principal para esse trabalho é a possibilidade futura de um projeto no qual seja desenvolvido um software, capaz de definir a função objetiva de sistemas de diversas complexidades e otimizá-la. Esse trabalho serve como ponto de partida para tal programa e debate sobre a melhor forma de se desenvolvê-lo.

Além disso, com a preocupação pela preservação do meio ambiente, com recursos naturais cada vez mais escassos, e uma crescente demanda de energia elétrica mundial, aumentam a importância de que os sistemas energéticos sejam mais eficientes. Portanto, o estudo da otimização é uma motivação para poder contribuir com a melhora desta situação.

Outra motivação para este trabalho é o fato de trabalhar com um método que não é comum para a resolução de problemas de sistemas térmicos, portanto tendo a oportunidade de aprender o funcionamento e as limitações impostas pelo mesmo. Além disso, com resultados favoráveis na aplicação ao sistema de cogeração do problema CGAM, que será apresentado neste trabalho, abre-se a possibilidade de



realizar um estudo para a potencialidade de aplicar o método em plantas de porte cada vez maior.

## **1.2. OBJETIVOS**

O objetivo deste trabalho consiste em verificar a potencialidade de aplicar o método dos pontos interiores para sistemas térmicos de cogeração de pequeno porte, mais especificamente a planta do problema CGAM (VALERO *et al.*, 1994a), além de realizar uma comparação entre dois programas que utilizam métodos diferentes para calcular o gradiente da função objetivo (analiticamente para o programa com o algoritmo explícito e numericamente para o que utiliza a função *fmincon*) para analisar a diferença entre resultados e esforço computacional.

## **1.3. FERRAMENTAS**

Para realizar a otimização do sistema, foi utilizado a ferramenta computacional MATLAB (MATrix LABoratory), um software interativo voltado para cálculo numérico desenvolvido pela empresa MathWorks. A plataforma foi utilizada para escrever os códigos que contém as rotinas de otimização do sistema, através do algoritmo do método dos pontos interiores, e também outros códigos auxiliares necessários para o funcionamento do programa. Também foi utilizada uma função própria do MATLAB, *fmincon*, como o algoritmo de otimização de um dos programas,

## **1.4. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

Além desta introdução, o trabalho conta com mais seis capítulos:

O segundo capítulo introduz o histórico de desenvolvimento da otimização e de seus métodos na história. Também apresenta ao leitor a teoria do método dos pontos interiores.

O terceiro capítulo contém o histórico do sistema térmico CGAM e seus modelos (físico, termodinâmico e econômico). Apresenta a função objetivo a ser otimizada e quais são as variáveis de decisão para o problema.

No quarto capítulo, apresenta ao leitor os algoritmos utilizados em cada um dos programas, de modo a facilitar o entendimento do método dos pontos interiores e

de facilitar a reprodução do mesmo.

O quinto capítulo apresenta os resultados obtidos por cada código, comparando-os entre si e com a solução original do problema em questão.

Por fim, no capítulo 6 são as considerações finais do trabalho, para analisar o cumprimento dos objetivos deste trabalho e apresentar possíveis recomendações para futuros trabalhos.

## **2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

### **2.1. SISTEMAS DE COGERAÇÃO**

Para o aperfeiçoamento dos sistemas energéticos, especificamente em termos de ganho de eficiência, é fundamental a redução de perda nos vários processos de conversão, necessários para atender aos consumidores nos seus usos finais. Ao se reduzirem tais perdas, reduzem-se, correspondentemente, os níveis de demanda de energia primária e todos os inevitáveis efeitos associados ao consumo de energia, como podem ser os impactos ambientais na exploração dos recursos naturais e na emissão de poluentes (LORA e NASCIMENTO, 2004). Neste sentido, destaca-se a tecnologia de produção combinada denominada cogeração.

#### **2.1.1. CONCEITO**

Cogeração corresponde à produção simultânea e sequencial de duas diferentes formas de energia útil a partir de uma única fonte. Geralmente, são produzidas energia eletromecânica e térmica a partir da queima de um combustível.

A cogeração é responsável por aumentar a eficiência do sistema, quando comparado a outro com geração de eletricidade e calor separados.

A aplicação da cogeração é classificada de duas maneiras distintas, dependendo da sequência de geração de calor e eletricidade:

- Topping: o calor não aproveitado não aproveitado pelas máquinas térmicas é utilizado em um sistema que necessita de energia térmica.
- Bottoming: a energia térmica é aproveitada primeiramente como o calor útil, e em seguida para a geração de eletricidade nas turbinas.

#### **2.1.2. CICLOS DE COGERAÇÃO**

##### **2.1.2.1. CICLO RANKINE COM COGERAÇÃO**

O ciclo Rankine consiste em um ciclo termodinâmico no qual o calor da combustão é fornecido para um fluido operante, geralmente água, que será transformada em

vapor. Logo após, o vapor resultante se expande em uma turbina, gerando trabalho, para depois atender a demanda energia térmica para o sistema, sendo condensado. No estado líquido, o mesmo será bombeado novamente para a caldeira, reiniciando o ciclo.

#### **2.1.2.1. CICLO COMBINADO COM COGERAÇÃO**

Num ciclo Rankine, gera-se vapor através de uma grande diferença de temperatura. A temperatura dos gases gerados do processo de combustão encontra-se na faixa de 1000-1300°C, no entanto, a temperatura do vapor é de 500-550°C. A combinação de um ciclo simples com turbinas a gás (ciclo Brayton) com um ciclo simples a vapor (ciclo Rankine) forma o ciclo combinado. Num ciclo combinado existe maior aproveitamento energético da energia inicial contida no combustível. Este aproveitamento é conseguido através da colocação em “cascata energética” de ambos os ciclos. A cascata energética se forma quando, no lugar de utilizar a grande diferença de temperaturas num processo de troca de calor, se coloca um ciclo Brayton para obter trabalho. Assim, a ineficiência termodinâmica natural da troca de calor pelo conceito de uma diferença finita de temperaturas entre os fluidos quente e frio é minimizada. (LORA e NASCIMENTO, 2004).

#### **2.1.2.2. CICLO BRAYTON COM COGERAÇÃO**

No ciclo Brayton, o ar atmosférico entra em um compressor, aumentando sua pressão antes de entrar na câmara de combustão. Neste equipamento, o ar se mistura com o combustível para que ocorra a combustão, gerando gases a altas temperaturas. O gás é expandido na turbina, gerando trabalho, e depois é encaminhado para uma caldeira de recuperação, onde fornecerá energia térmica com o objetivo de gerar vapor.

O ciclo Brayton é o que apresenta maior potencial para plantas de cogeração, devido às altas temperaturas dos gases de exaustão após saírem da turbina, sendo atrativa para a geração de vapor. Este ciclo é apresenta o maior interesse para esse trabalho, pois o problema CGAM é um utilização do mesmo.

#### **2.1.3. EQUIPAMENTOS DO CICLO BRAYTON COM COGERAÇÃO**

Neste tópico, são apresentados os equipamentos utilizados no ciclo Brayton, pois é

o ciclo de maior interesse no trabalho.

### **2.1.3.1. TURBINA A GÁS**

Geralmente, refere-se ao conjunto de três equipamentos principais: um compressor de ar, uma câmara de combustão e uma turbina.

No compressor, o ar é admitido e comprimido, resultando em um aumento de pressão e temperatura.

A câmara de combustão tem a finalidade de queimar uma quantidade de combustível fornecida pelo injetor, com uma grande quantidade de ar proveniente do compressor, e liberar o calor de tal maneira que o ar é expandido e acelerado para dar uma corrente suave e uniforme do gás quente, necessária à turbina. Isso deve ser alcançado com a mínima perda de pressão e a máxima eficiência (LORA e NASCIMENTO, 2004).

A turbina tem a tarefa de fornecer potência para acionar o compressor e acessórios, e no caso de turbina a gás, as quais não fazem uso somente da propulsão, potência de eixo. Ela faz isso extraindo energia dos gases quentes liberados na câmara de combustão e expandindo-os para uma pressão e temperatura mais baixas (LORA e NASCIMENTO, 2004).

No restante deste trabalho, o termo “turbina a gás” é utilizado para se referir a turbina isoladamente, e não o conjunto “compressor, combustor e turbina” descritos neste tópico.

### **2.1.3.2. CALDEIRA DE RECUPERAÇÃO**

A caldeira de recuperação é um equipamento que recupera calor residual para produzir vapor a partir da energia térmica dos gases de exaustão da turbina a gás. Geralmente, são divididas em três componentes: o economizador, o evaporador e o superaquecedor.

O economizador recebe a água de alimentação, que é aquecida pela troca de calor com os gases de exaustão. Então, a água segue para o evaporador, para que ocorra a troca de estado para vapor.

O vapor segue então para o superaquecedor, no qual troca calor com os gases de exaustão a altas temperaturas, logo após a saída da turbina, aumentando sua temperatura antes de ser entregue ao seu processo industrial.

### **2.1.3.3. PRÉ-AQUECEDOR DE AR**

No ciclo Brayton regenerativo, o préaquecimento do ar antes da sua entrada à câmara de combustão é realizado transferindo calor dos gases de exaustão da turbina (LORA e NASCIMENTO, 2004).

O regenerador do ciclo Brayton regenerativo de turbina a gás pode ser, entre outros, trocadores de calor do tipo corrente paralela e contracorrente, sendo que nos contracorrentes se consegue um melhor efeito de regeneração (LORA e NASCIMENTO, 2004).

## **2.2. OTIMIZAÇÃO**

Problemas de otimização buscam maximizar ou minimizar determinada função matemática, geralmente conhecida como função objetivo, através da escolha sistemática de valores para certas variáveis, conhecidas como variáveis de decisão. Ao encontrar os valores mínimos ou máximos da função, encontra-se então o valor ótimo dessas variáveis.

Em problemas de engenharia, mais especificamente sistemas térmicos, a minimização é comumente utilizada quando a função objetivo é o custo, a taxa de emissão de poluentes ou a destruição de exergia, enquanto a maximização da função objetivo é utilizada quando esta representa o rendimento energético, exergético ou a produção.

A otimização matemática trabalha com quaisquer valores para as variáveis de decisão, enquanto a engenharia só trabalha com valores que sejam fisicamente possíveis. Portanto, as variáveis, sendo de projeto ou não, geralmente não podem assumir quaisquer valores. Por exemplo, é fisicamente impossível uma máquina possuir rendimento exergético maior do que uma unidade. Por isso, o problema de otimização possui restrições, de igualdade ou desigualdade, que limitam das variáveis de decisão.

Sendo assim, os problemas de otimização na engenharia são geralmente de natureza não linear, com restrições de igualdade e desigualdade, além de apresentar limites nas variáveis de decisão. Este é o caso do sistema térmico apresentado no próximo capítulo.

### **2.3. OTIMIZAÇÃO TERMOECONÔMICA**

Termoeconomia define-se como o ramo da engenharia que combina a análise termodinâmica e os princípios econômicos com a finalidade de prover, ao projetista ou operador do sistema, informações não disponíveis através de análises energéticas e avaliações econômicas convencionais, porém são cruciais para o projeto e operação eficientes do sistema (BEJAN *et al.*, 1996).

Atribui-se a Keenan a ideia de a primeira discussão sobre unir o conceito de exergia com custos de fluxo, no ano de 1932 (ABUSOGLU e KANOGLU, 2009). Porém, foi somente no final da década de 1950, com o trabalho de Evans e Tribus sobre análise exergética em processos de dessalinização, que surgiu a ideia de custos exergéticos aplicados a engenharia econômica, a qual eles denominaram de “Termoeconomia”. O conceito estudado era de se rastrear o fluxo de dinheiro, custo do combustível e custos de operação e amortização através da planta, associando a utilidade de cada fluxo a sua exergia. Com a contribuição ao estudo de El-Sayed, no final da década de 1960, originou-se a primeira fundamentação matemática para a otimização de sistemas térmicos. Outro estudo baseado nessa ideia foi realizado por Reistad em 1970, que aplicou o método de El-Sayed e Evans em um sistema térmico e comparou os resultados com os obtidos através de métodos convencionais (ABUSOGLU e KANOGLU, 2009).

Apesar dos estudos pioneiros já citados, foi somente na década de 1990 que os conceitos da termoeconomia começaram a ser aplicados sistematicamente para a análise, otimização e projeto de sistemas térmicos. Surgiram então novas metodologias, originando assim novos conceitos com suas próprias nomenclaturas, definições e aplicações (VALERO *et al.*, 1994a).

Durante esse período, Frangopoulos e von Spakovsky aplicaram e formalizaram o primeiro método desenvolvido por Evans e El-Sayed (ABUSOGLU e KANOGLU,

2009). Tsatsaronis introduziu conceitos fundamentais a termoeconomia, como a exergoeconomia, combinação entre a análise exergética e os princípios econômicos na análise de sistemas térmicos. Valero e Lozano apresentaram várias aplicações da Teoria do Custo Exergético, que representou um marco no ramo da Termoeconomia.

Em 1990, um grupo de especialistas na área (C. Frangopoulos, G. Tsatsaronis, A. Valero, M. von Spakovsky) decidiram comparar as suas metodologias resolvendo um simples problema de otimização predefinido: o problema CGAM, que foi nomeado com as iniciais dos primeiros nomes dos participantes. O objetivo do problema CGAM é mostrar como as metodologias eram aplicadas, quais conceitos eram usados e quais resultados eram obtidos em um problema específico (VALERO *et al.*, 1994a). Após a apresentação do problema, seguiu-se uma sequência de trabalhos (FRANGOPOULOS, 1994, SPAKOVSKY, 1994, VALERO *et al.*, 1994b, TSATSARONIS *et al.*, 1994), no qual cada autor utilizou um diferente método de otimização termoeconômica para a função objetivo predefinida. O objetivo do problema CGAM era a unificação das metodologias termoeconômicas, e não uma competição entre as mesmas. (VALERO *et al.*, 1994a)

Desde a década de 1980, vários trabalhos tem sido publicados sobre a análise, otimização e aplicação do custo exergoeconômico em sistemas térmicos. A maior parte desses trabalhos foram publicados após meados da década de 1990, devido a um melhor formalismo estrutural das metodologias termoeconômicas. (ABUSOGLU e KANOGLU, 2009).

Atualmente, diversos métodos já foram estudados para otimização de sistemas térmicos de portes variados, sendo os mais comuns:

- Algoritmo Genético: primeiramente, é definido uma grande quantidade de pontos iniciais geradas randomicamente. Uma porção desses pontos é selecionada de acordo com a qualidade da solução representada, através de um filtro (“seleção natural”). Logo após, os pontos selecionados criaram um novo conjunto de soluções, através de um “crossover” ou de uma mutação. O processo é repetido até que um dos critérios de parada sejam atendidos.



- Enxame de Partículas: inicialmente, são definidos diversos pontos como candidatos a solução, que serão movidos de acordo ao melhor resultado encontrado pelo ponto específico e pelo conjunto de pontos, sendo esses guias atualizados cada vez que um ponto melhor for encontrado.
- Recozimento simulado: tem como inspiração o processo termodinâmico de recozimento, no qual a temperatura do sólido é elevado a uma alta temperatura e seguido de um resfriamento lento e controlado. O método substitui uma solução atual por uma solução próxima aleatória, aceitando sempre as que forem melhores, porém podendo também aceitar uma solução pior do que a anterior de acordo com uma probabilidade dependente de T. Quanto maior for T, maior será a componente aleatória acrescentada à solução. À medida que o programa realiza iterações, a temperatura T diminui, de modo que ao chegar a zero, o programa termina, encontrando uma solução ótima.

## 2.4. MÉTODO DOS PONTOS INTERIORES

### 2.4.1. HISTÓRICO

Karmarkar (1984) propôs seu método projetivo para resolver problemas lineares de programação: de um ponto de vista teórico, seu pior caso de complexidade é polinomial, comparado com o algoritmo simplex, comumente utilizado para essa classe de problemas na época e considerado o melhor método, que poderia realizar, no pior dos casos, uma quantidade exponencial de passos em relação ao tamanho do problema.

Durante o pico de interesse no método de Karmarkar, foi demonstrado por Gill *et al.* (1986) de que o método possuía uma equivalência com o clássico método das barreiras logarítmicas aplicadas a problemas lineares. Logo, pesquisadores passaram a analisar o método das barreiras como uma possível solução de tempo polinomial para programação linear (WRIGHT, 2004).

Após as publicações do método de Karmarkar e suas conexões com o método das

barreiras logarítmicas, pesquisadores começaram a desenvolver novos algoritmos para otimizar problemas lineares, utilizando propriedades derivadas deste método. Além disso, como o método das barreiras logarítmicas (diferentemente do simplex) foi originalmente desenvolvido para problemas não lineares, era evidente que o mesmo poderia ser aplicado a outros problemas de otimização, como programação quadrática e programação não linear. (WRIGHT, 2004).

Uma característica marcante do novo algoritmo é o fato de chegar a uma solução ótima para o problema caminhando através de pontos interiores da região viável ao contrário do simplex, que a atinge gerando uma sequência de pontos extremos adjacentes. (DUTRA, 2004)

#### 2.4.2. ALGORITMO BÁSICO DO MÉTODO

As próximas sessões apresentam o método primal-dual de pontos interiores com barreira logarítmica, sendo todas as deduções matemáticas baseadas no trabalho de Wächter e Biegler (WÄTCHER e BIEGLER, 2005).

As informações sobre as condições de Karush-Kuhn-Tucker e o método de Newton são baseadas na publicação de Robert Robere (ROBERE, 2012).

#### 2.4.3. APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DAS BARREIRAS LOGARÍTMICAS

Primeiramente, representa-se a função objetivo, com  $x \in \mathbb{R}^n$ , sujeito às restrições de igualdade e de desigualdade:

$$\text{Min. } f(x) \tag{2.1a}$$

$$\text{S.a. } h(x) = 0 \tag{2.1b}$$

$$g(x) \geq 0 \tag{2.1c}$$

Podemos criar variáveis adicionais para cada restrição de desigualdade, de modo a transformá-las em restrições de igualdade ao fazer tais variáveis atenderem a uma desigualdade, no caso  $x \geq 0$ , como demonstrado abaixo:

$$g(x) \geq 0 \implies g(x) = s, \text{ onde } s \geq 0 \tag{2.2}$$

Nas representações abaixo,  $x$  representa o conjunto entre as variáveis de decisão e

de folga. Vale ressaltar que a função objetivo apresenta gradiente somente em relação às variáveis de decisão, e não às de folga.

As equações (2.1) podem, com auxílio das variáveis de folga, ser representadas pelo seguinte sistema de equações:

$$\text{Min. } f(x) \quad (2.3a)$$

$$\text{S.a. } c(x) = 0 \quad (2.3b)$$

$$x \geq 0 \quad (2.3c)$$

O método das barreiras consiste em subtrair uma função logarítmica, multiplicada pelo parâmetro  $\mu$ , da função objetivo, de modo que as variáveis devem ser sempre positivas para atender a nova função. O parâmetro  $\mu$  recebe um valor inicial maior que a unidade, e decresce à medida que a otimização prossegue, de modo que ao final, com  $\mu=0$ , a função objetivo é equivalente à original.

Então, através do método das barreiras, a equação (2.3c) combina-se com a equação (2.3a):

$$\text{Min. } \varphi(x) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^n \ln(x^{(i)}) \quad (2.4a)$$

$$\text{S.a. } c(x) = 0 \quad (2.4b)$$

Para uma função objetivo sem restrições, a análise do gradiente e hessiano da função são suficientes para definir condições para que uma solução  $x^*$  seja considerada ótima. Porém, no caso de uma função objetivo com restrições, o lagrangiano da função é usado de maneira similar ao incluir informações sobre as restrições. As condições de Karush-Kuhn-Tucker são utilizadas para formalizar essa ideia.

Primeiramente, define-se o a função de Lagrange ou lagrangiana do sistema é definido por:

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i(x), \quad (2.5)$$

O conjunto  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$  representam os multiplicadores de Lagrange. Tais

parâmetros são utilizados para descrever como os gradientes das funções de restrição se comportam ao atingir o mínimo da função objetivo.

Pode-se, então, definir as condições de Karush-Kuhn-Tucker:

- $\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0$
- Todas as restrições são satisfeitas em  $x^*$
- $\lambda_i^* \geq 0$
- Sendo  $1 \leq i \leq m$ ,  $\lambda_i^* c_i^*(x^*) = 0$

Aplicando as condições KKT para o sistema de equações (2.4), tem-se o seguinte resultado:

$$\nabla f(x) + \nabla c(x)\lambda - \mu \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0 \quad (2.6a)$$

$$c(x) = 0 \quad (2.6b)$$

Ao adotar  $z_i = \mu/x_i$ , podemos definir outro sistema:

$$\nabla f(x) + \nabla c(x)\lambda - z = 0 \quad (2.7a)$$

$$c(x) = 0 \quad (2.7b)$$

$$XZe - \mu e = 0 \quad (2.7c)$$

As equações (2.6) para  $\mu = 0$ , em conjunto com  $x, z \geq 0$ , são as condições de Karush-Kuhn-Tucker para o problema original do sistema de equações (2.3).

#### 2.4.4. SOLUÇÃO DO PROBLEMA BARREIRA

Para resolver o problema barreira, representado nas equações (2.4), para um valor fixo do parâmetro  $\mu$ , é aplicado o método de Newton às equações primal-dual (2.7). O parâmetro  $k$  representa o contador da iteração no loop interno.

O método de Newton pode ser simplificado por:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (2.8)$$

Com algumas modificações, temos:

$$x_{k+1} - x_k = d_k^x = -\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \quad (2.9)$$

Aplicando (2.9) no sistema de equações (2.7), obtêm-se direções de procura  $(d_k^x, d_k^\lambda, d_k^z)$ :

$$\begin{bmatrix} W_k & \nabla c(x_k) & I \\ \nabla c(x_k)^T & 0 & 0 \\ Z_k & 0 & X_k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_k^x \\ d_k^\lambda \\ d_k^z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f(x_k) + \nabla c(x_k)\lambda_k - z_k \\ c(x_k) \\ X_k Z_k e - \mu e \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Na matriz (3.10),  $W_k$  representa o hessiano  $\nabla_{xx}^2 L(x_k, \lambda_k, z_k)$  do lagrangiano da função original,

$$L(x, \lambda) = f(x) + c(x)^T \lambda - z \quad (2.11)$$

Porém, ao invés de resolver a matriz não simétrica (2.10), obtêm-se o mesmo resultado ao resolver a matriz simétrica:

$$\begin{bmatrix} W_k + \Sigma_k & \nabla c(x_k) \\ \nabla c(x_k)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_k^x \\ d_k^\lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f(x_k) + \nabla c(x_k)\lambda_k \\ c(x_k) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

A matriz  $\Sigma$  é definida como:

$$\Sigma_k = X_k^{-1} Z_k \quad (2.13)$$

O vetor direção  $d_k^z$  é então obtido explicitamente por:

$$d_k^z = \mu X_k^{-1} e - z_k - \Sigma_k d_k^x \quad (2.14)$$

Após encontrar os vetores direção através das equações (2.12) e (2.14), deve-se calcular os passos  $\alpha_k$  e  $\alpha_k^z$  para determinar os valores da próxima iteração:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k^x \quad (2.15a)$$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \alpha_k d_k^\lambda \quad (2.15b)$$

$$z_{k+1} = z_k + \alpha_k^z d_k^z \quad (2.15c)$$

O passo em  $z$  é diferente do passo das outras variáveis para evitar restrição

desnecessária dos passos.

Aplica-se então um critério para limitar o passo de modo que a variável fique próxima ao limite.

$$\alpha_k := \max\{\alpha \in (0,1]: x_k + \alpha d_k^x \geq (1 - \tau)x_k\} \quad (2.16a)$$

$$\alpha_k^z := \max\{\alpha \in (0,1]: z_k + \alpha d_k^z \geq (1 - \tau)z_k\} \quad (2.16b)$$

O parâmetro  $\tau$  é definido por:

$$\tau = \max\{\tau_{min}, 1 - \mu\} \quad (2.17)$$

#### 2.4.5. REDUÇÃO DO PARÂMETRO DE BARREIRA

Pode-se definir o erro de optimabilidade como:

$$\Sigma_\mu(x, \lambda, z) := \max\left\{\frac{\|\nabla f(x) + c(x) - z\|}{s_d}, \|c(x)\|, \frac{\|XZe - \mu e\|}{s_c}\right\} \quad (2.18)$$

Os parâmetros  $s_d, s_c \geq 1$  são definidos por:

$$s_d = \max\left\{s_{max}, \frac{\|\lambda\| + \|z\|}{(m+n)}\right\} \quad (2.19a)$$

$$s_c = \max\left\{s_{max}, \frac{\|\lambda\|}{n}\right\} \quad (2.19b)$$

Para que seja necessária uma redução do valor de  $\mu$ , é necessário que a seguinte condição, na qual  $k_\epsilon \geq 0$ , seja satisfeita:

$$\Sigma_\mu(x, \lambda, z) \leq k_\epsilon \mu \quad (2.20)$$

Caso a condição seja satisfeita, o parâmetro será atualizado de acordo com a seguinte equação, na qual  $k_\mu \in (0, 1)$  e  $\theta_\mu \in (1, 2)$ :

$$\mu_{j+1} = \max\left\{\frac{\epsilon_{tol}}{10}, \min\left\{k_\mu \mu, \mu_j^{\theta_\mu}\right\}\right\} \quad (2.21)$$

O parâmetro  $\epsilon_{tol} > 0$  é a tolerância do erro, definido pelo usuário.

#### 2.4.6. CRITÉRIO DE PARADA

Define-se  $\Sigma_0(x, \lambda, z)$  como sendo a equação (2.18) para  $\mu = 0$ .

O algoritmo terminará caso haja uma solução  $(x^*, \lambda^*, z^*)$  que satisfaça a seguinte condição:

$$\Sigma_0(x^*, \lambda^*, z^*) \leq \epsilon_{tol} \quad (2.22)$$

#### 2.4.7. POSSÍVEIS ADIÇÕES AO ALGORITMO

#### 2.4.8. LIMITES SUPERIORES E INFERIORES GERAIS

O algoritmo foi descrito para resolver problemas de otimização com formato similar às equações (3.3) por questões de simplicidade. Porém, o mesmo poderia ser descrito de forma a atender equações nas quais as variáveis de decisão possuem limites superiores e inferiores:

$$\text{Min. } f(x) \quad (2.23a)$$

$$\text{S.a. } c(x) = 0 \quad (2.23b)$$

$$x_L \leq x \leq x_U \quad (2.23c)$$

O problema resultante é definido por:

$$\text{Min. } \varphi(x) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^n \ln(x^{(i)} - x_L^{(i)}) - \mu \sum_{i=1}^n \ln(x_U^{(i)} - x^{(i)}) \quad (2.24a)$$

$$\text{S.a. } c(x) = 0 \quad (2.24b)$$

Neste caso,  $I_L = [i: x_L \neq -\infty]$  e  $I_U = [i: x_U \neq \infty]$ . Os parâmetros  $z_L^{(i)}$  e  $z_U^{(i)}$  são definidos para os limites inferiores e superiores finitos, e o hessiano primal-dual  $\Sigma_k$  é definido pela soma de  $\Sigma_k^L = \text{diag}(\sigma_{k,1}^L, \dots, \sigma_{k,n}^L)$  e  $\Sigma_k^U = \text{diag}(\sigma_{k,1}^U, \dots, \sigma_{k,n}^U)$ , onde

$$\sigma_{k,i}^L = \begin{cases} z_{L,k}^{(i)} / (x_k^{(i)} - x_L^{(i)}), & i \in I_L \\ 0, & i \notin I_L \end{cases} \quad (2.25a)$$

$$\sigma_{k,i}^U = \begin{cases} z_{U,k}^{(i)} / (x_U^{(i)} - x_k^{(i)}), & i \in I_U \\ 0, & i \notin I_U \end{cases} \quad (2.25b)$$

Para finalizar, define-se  $z_{L,k}^{(i)} = 0$  para  $i \notin I_L$  e  $z_{U,k}^{(i)} = 0$  para  $i \notin I_U$ .

### 2.4.9. INICIALIZAÇÃO

Como o algoritmo requer que as iterações não violem as restrições do problema, é necessário que os valores iniciais para as variáveis de decisão satisfaçam essa condição.

Com as variáveis de decisão iniciais definidas, podemos então calcular os multiplicadores de fronteira iniciais  $z_L$  e  $z_U$  e por fim, o parâmetro primal-dual  $\lambda_0$  é definido como a solução pelo método dos mínimos quadrados da equação (2.7a):

$$\begin{bmatrix} I & \nabla c(x_0) \\ \nabla c(x_0) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f(x_0) - z_{L,0} + z_{U,0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

A primeira equação resultante do sistema (2.26) define  $w$  como o resíduo da função. A segunda equação representa o gradiente, em relação à  $\lambda$ , da soma dos quadrados do resíduo, que é igualada a zero para encontrar o mínimo. Resolvendo o sistema, encontramos a seguinte equação para inicializar  $\lambda$ :

$$\lambda_0 = (\nabla c(x_0) * \nabla c(x_0)^T)^{-1} * \nabla c(x_0) * \nabla f(x_0) \quad (2.27)$$

### 2.4.10. FUNÇÃO DE MÉRITO

A função de mérito ou de penalidade é uma combinação entre a função objetivo e a violação das restrições, de modo que a convergência pode ser garantida através da redução da função de mérito. A expressão que a representa é a seguinte:

$$\phi_v(x) = \varphi_{\mu_j}(x) + v \|c(x)\| \quad (2.28)$$

A cada iteração, o parâmetro de penalidade é atualizado através da seguinte relação:

$$v_k = \begin{cases} v_{k-1}, & v_{k-1} \geq v_k^+ \\ 1 + v_k^+, & v_{k-1} \leq v_k^+ \end{cases} \quad (2.29)$$

O parâmetro  $v_k^+$  definido por:

$$v_k^+ = \frac{\nabla \varphi(x_k)^T d_k^x - 0,5 \zeta_k (d_k^x)^T (W + \Sigma_k) d_k^x}{(1 - \rho) \|c(x_k)\|} \quad (2.30)$$

O escalar  $\zeta$  tem valor unitário caso  $(d_k^x)^T (W + \Sigma_k) d_k^x > 0$  e tem valor nulo caso a



condição não seja satisfeita, e o outro parâmetro  $\rho \in (0,1)$ .

Para cada passo  $\alpha_{k,l}$ , a redução prevista para a função de mérito é definida por:

$$\begin{aligned} pred_k(\alpha_k, d_k^x) &= -\alpha_k \nabla \varphi_{\mu_j}(x_k)^T d_k^x - 0,5 \alpha_k^2 \zeta_k (d_k^x)^T (W + \Sigma_k) d_k^x + \dots \\ &\dots + v_k (\|c(x_k)\| - \|c(x_k) + \alpha_k \nabla c(x_k)^T d_k^x\|) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Logo após, determina-se a redução real da função de mérito:

$$ared_k(\alpha_k, d_k^x) = \phi_{vk}(x_k) - \phi_{vk}(x_k + \alpha_k d_k^x) \quad (2.32)$$

Compara-se então as duas reduções com a seguinte expressão,

$$ared_k(\alpha_k, d_k^x) < \eta pred_k(\alpha_k, d_k^x) \quad (2.33)$$

Se a condição (2.32) for satisfeita, então se utiliza o passo testado para determinar o novo valor das variáveis de decisão e a iteração volta ao início. Caso contrário, reduz-se o tamanho do passo e reinicia-se o processo. Como a direção  $d_k^x$  para minimizar  $\phi_{vk}$ , existe um passo suficientemente pequeno que satisfará a condição necessária para dar continuidade à otimização, garantindo assim a convergência.

#### 2.4.11. MÉTODO DO FILTRO

O método do filtro, proposto por Fletcher e Leyffer (2002), surgiu como uma alternativa ao método do mérito. Trata-se o problema barreira representado pelas equações (2.4) como duas funções objetivos a serem minimizadas,  $\varphi_\mu$  e  $\theta(x) = \|c(x)\|$ . Com essa consideração, então se define como aceitável o ponto quando qualquer uma das funções a serem otimizadas apresentarem uma redução suficiente:

$$\theta(x_k + \alpha_k d_k^x) \leq (1 - \gamma_\theta) \theta(x_k) \quad (2.34a)$$

$$\varphi_\mu(x_k + \alpha_k d_k^x) \leq \varphi_\mu(x_k) - \gamma_\theta \theta(x_k) \quad (2.34b)$$

Os parâmetros  $\gamma_\theta, \gamma_\varphi \in (0,1)$  são constantes fixas. Logo, o algoritmo possui um filtro  $F_k \subseteq \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2: \theta \geq 0\}$  para cada iteração k. O filtro é inicializado segundo a seguinte expressão:

$$F_0 \subseteq \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2: \theta \geq \theta^{max}\} \quad (2.35)$$

O parâmetro  $\theta^{max}$  representa a violação a partir da qual um ponto jamais será aceito. Caso o filtro seja violado, o mesmo é aumentado:

$$F_{k+1} = F_k \cup \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2: \theta \geq (1 - \gamma_\theta)\theta(x_k); \varphi \geq \varphi_\mu(x_k) - \gamma_\theta\theta(x_k)\} \quad (2.36)$$

#### 2.4.12. CORREÇÃO DE SEGUNDA ORDEM

Comumente, métodos para otimização de problemas não lineares utilizam uma correção de segunda ordem para melhorar um passo que resultou na rejeição de um ponto.

A correção de segunda ordem consiste em aplicar um passo de Newton adicional para o ponto  $x_k + \alpha_k d_k^x$  usando o jacobiano  $\nabla c(x_k)^T$ . Se o passo inicial  $\bar{d}_k^x = \alpha_k d_k^x$  rejeitado e  $\theta(x_k + \alpha_k d_k^x) \geq \theta(x_k)$ , uma correção de segunda ordem  $d_k^{x,soc}$  é calculada tal que a seguinte condição é satisfeita:

$$\nabla c(x_k)^T d_k^{x,soc} + c(x_k + \alpha_k d_k^x) = 0 \quad (2.37)$$

Então, a nova direção é definida por:

$$d_k^{x,cor} = \alpha_k d_k^x + d_k^{x,soc} \quad (2.38)$$

Através da combinação das equações (2.12), (2.36) e (2.37), podemos montar a seguinte expressão:

$$c_k^{soc} = \alpha_k c(x_k) + c(x_k + \alpha_k d_k^x) \quad (2.39)$$

Finalmente, monta-se o sistema para calcular o passo:

$$\begin{bmatrix} W_k + \Sigma_k & \nabla c(x_k) \\ \nabla c(x_k)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_k^{x,cor} \\ d_k^\lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla \varphi_\mu(x_k) + \nabla x(x_k) \lambda_k \\ c_k^{soc} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Então, novamente aplica-se o critério para limitar o passo:

$$\alpha_k^{soc} := \max\{\alpha \in (0,1]: x_k + \alpha d_k^{x,soc} \geq (1 - \tau)x_k\} \quad (2.41)$$

O ponto encontrado passará novamente pelo filtro para verificar se deve ser aceito. Caso as condições do filtro não sejam satisfeitas, o programa reinicia com um passo menor.

### 3. SISTEMA CGAM

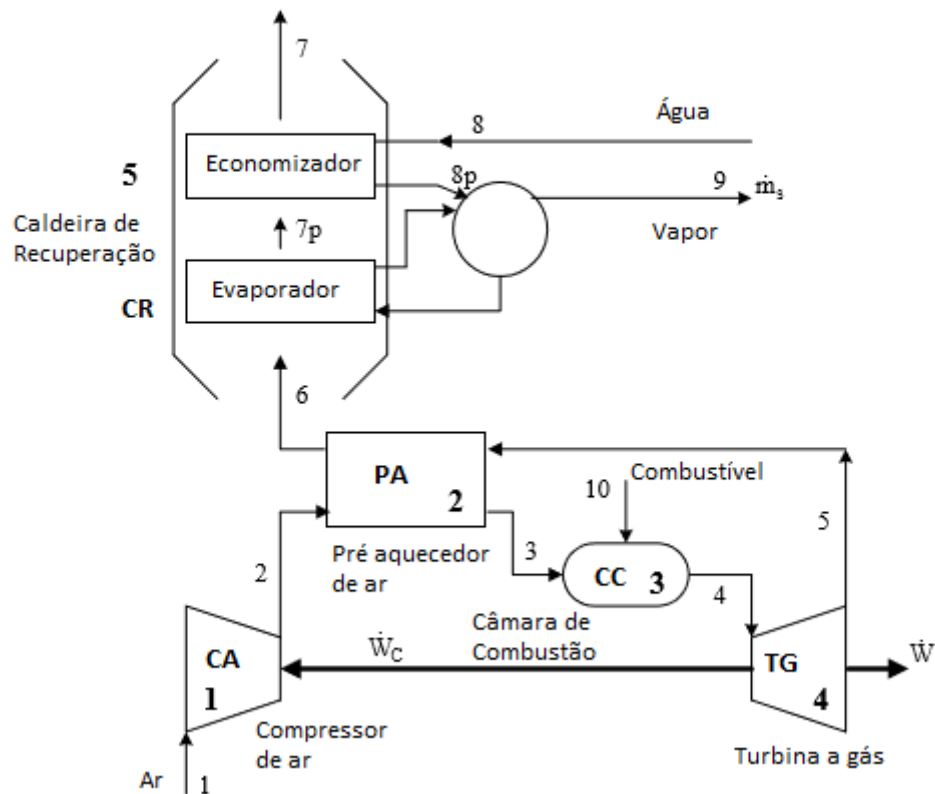
Nesse capítulo é apresentado os modelos físico e termodinâmico do sistema térmico estudado nesse trabalho. Além disso, também é apresentado o equacionamento econômico adotado.

No Simpósio Internacional de “Efficiency, Costs, Optimization, and Simulation of Energy Systems (ECOS 92)”, realizado em 1992, em Saragosa na Espanha, uma seção foi especialmente reservada para o problema CGAM. (VALERO *et al.*, 1994a). O problema foi apresentado, para que seus quatro autores, cujas iniciais deram origem ao nome (C.Frangopoulos, G. Tsatsaronis, A. Valero e M. von Sakovsky), comparassem suas metodologias ao otimizar um sistema térmico predefinido. A apresentação do problema (VALERO *et al.*, 1994a), e as respectivas quatro metodologias aplicadas (FRANGOPOULOS, 1994, SPAKOVSKY, 1994, VALERO *et al.*, 1994b, TSATSARONIS *et al.*, 1994), foram publicadas integralmente na revista *International Energy*.

Para a realização da otimização, é necessário especificar os modelos físicos e econômicos da instalação, além da função objetivo a ser minimizada. Esta última consiste no custo total de operação a uma demanda de produção de eletricidade e vapor, no caso do CGAM.

O problema CGAM é uma planta de cogeração que produz 30MW de eletricidade e 14 kg/s de vapor saturado a uma pressão de 20 bar. A estrutura da planta de cogeração é mostrada na figura 1

Figura 1- Sistema de cogeração do problema CGAM



Fonte: Adaptado de Frangopoulos, 2003

A instalação possui um compressor de ar (CA), responsável por comprimir o ar a partir das condições atmosféricas, e uma turbina a gás (TG), para gerar trabalho. O ar que sai do compressor passa por um pré-aquecedor (PA), que utiliza parte da energia térmica dos gases que saem da turbina, para aquecê-lo antes da câmara de combustão (CC). Por fim, os gases trocam calor, em uma caldeira de recuperação (CR), com um fluxo de água com a finalidade de produzir vapor. A caldeira de recuperação pode ser dividida em duas partes: um economizador (EC), no qual a água é preaquecida; e um evaporador (EV).

Na definição do problema, as equações que descrevem o comportamento do sistema (modelo físico), as equações para calcular os custos dos equipamentos (modelo econômico) e as equações de estado utilizadas para calcular as propriedades termodinâmicas (modelo termodinâmico) são consideradas.

Para simplificar tais modelos, utilizam-se as seguintes hipóteses:

- O ar e gases da combustão comportam-se como gases ideais com calor específico constante ( $c_{P,a}$  e  $c_{P,g}$ )
- Para os cálculos da combustão, o combustível considerado é o metano ( $\text{CH}_4$ ) com um poder calorífico inferior (PCI) equivalente a 50000 kJ/kg.
- São escolhidos valores razoáveis para a perda de carga na câmara de combustão, no pré-aquecedor e caldeira de recuperação.
- Todos os componentes, com exceção da câmara de combustão, são adiabáticos.

### 3.1. VARIÁVEIS DE DECISÃO

As cinco variáveis de decisão selecionadas para a otimização são as seguintes: a relação de pressão no compressor ( $P_2/P_1$  ou  $r_c$ ), a eficiência isentrópica do compressor de ar ( $\eta_{CA}$ ) e da turbina a gás ( $\eta_{TG}$ ), a temperatura do ar na entrada da câmara de combustão ( $T_3$ ) e a temperatura do gás de combustão na entrada da turbina ( $T_4$ ). Os modelos são formulados em função dessas variáveis de decisão. (VALERO et al., 1994a).

### 3.2. MODELO FÍSICO

Nesse tópico, serão apresentadas as equações, que compõem o modelo físico da planta, obtidas a partir dos balanços de massa e energia para cada componente do sistema.

- Compressor de Ar (CA):

Para o compressor de ar, a temperatura  $T_1$  e pressão  $P_1$  na entrada são conhecidas. Então, é necessário calcular a temperatura  $T_2$  e pressão  $P_2$  de saída, e o trabalho do compressor  $W_{CA}$ .

$$P_1 = P_0 \quad (3.1)$$

$$T_1 = T_0 \quad (3.2)$$

$$T_2 = T_1 \left\{ 1 + \frac{1}{\eta_{CA}} \left[ \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a}} - 1 \right] \right\} \quad (3.3)$$

$$P_2 = r_c P_1 \quad (3.4)$$

$$W_{CA} = \dot{m}_a c_{p,a} (T_2 - T_1) \quad (3.5)$$

- Câmara de Combustão (CC):

As temperaturas de entrada e saída são variáveis de decisão, portanto não precisam ser calculadas. O poder calorífico inferior do combustível (PCI) é de 50000kJ/kg, a eficiência térmica da caldeira é 98% e a perda de carga na mesma é de 5% da pressão de entrada.

$$\dot{m}_g = \dot{m}_f + \dot{m}_a \quad (3.6)$$

$$\dot{m}_a h_3 + \dot{m}_f PCI = \dot{m}_g h_4 + \dot{Q}_{p,CC} \quad (3.7)$$

$$\dot{Q}_{p,CC} = \dot{m}_f PCI (1 - \eta_{CC}) \quad (3.8)$$

$$P_4 = P_3 (1 - \Delta P_{CC}) \quad (3.9)$$

- Pré-Aquecedor de Ar (PA):

A perda de carga na tubulação de ar é de 5% da pressão de entrada, enquanto na tubulação a gás é de 3%.

$$\dot{m}_a c_{p,a} (T_3 - T_2) = \dot{m}_g c_{p,g} (T_5 - T_6) \quad (3.10)$$

$$P_3 = P_2 (1 - \Delta P_{a,PA}) \quad (3.11)$$

$$P_6 = P_5 (1 - \Delta P_{g,PA}) \quad (3.12)$$

- Turbina a Gás (TG):

A temperatura de entrada é uma variável de decisão, juntamente com a eficiência isentrópica da turbina. O trabalho líquido da planta é 30MW.

$$T_5 = T_4 \left\{ 1 - \eta_{TG} \left[ 1 - \left( \frac{P_4}{P_5} \right)^{\frac{1-\gamma_g}{\gamma_g}} \right] \right\} \quad (3.13)$$

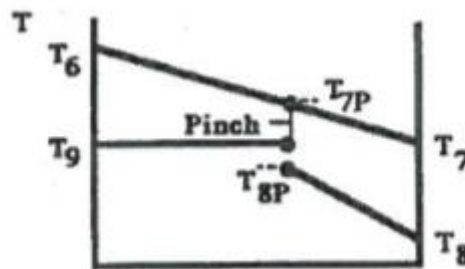
$$\dot{W}_{TG} = \dot{m}_g c_{P,g} (T_4 - T_5) \quad (3.14)$$

$$\dot{W}_{liq} = \dot{W}_{TG} - \dot{W}_{CA} \quad (3.15)$$

- Caldeira de Recuperação (CR):

O fluxo de água e vapor na caldeira de recuperação é de 14 kg/s, a 20 bar. A temperatura de entrada da água  $T_8$  é de 25°C. A diferença de temperatura da água que sai do economizador  $T_{8p}$  e do vapor  $T_9$  é de 15°C.

Figura 2 – Temperaturas na Caldeira de Recuperação



A perda de carga é de 5%. As diferenças de entalpia estão representadas abaixo:

$$T_{8p} = T_9 - \Delta T_A \quad (3.16)$$

$$h_9 - h_{8p} = 1956 \text{ kJ/kg} \quad (3.17)$$

$$\dot{m}_g c_{P,g} (T_6 - T_{7p}) = \dot{m}_v (h_9 - h_{8p}) \quad (3.18)$$

$$\Delta T_p = T_{7p} - T_9 > 0 \quad (3.19)$$

$$h_9 - h_8 = 2690 \text{ kJ/kg} \quad (3.20)$$

$$T_7 = T_6 - \dot{m}_v \frac{(h_9 - h_8)}{(\dot{m}_g c_{P,g})} \quad (3.21)$$

$$P_0 = P_6 (1 - \Delta P_{CR}) \quad (3.22)$$

### 3.3. MODELO TERMODINÂMICO

- Ambiente de referência:

Pressão: pressão atmosférica  $P_0 = 1,013$  bar.

Temperatura: temperatura ambiente  $T_0 = 25$  °C

Substâncias de referência: ar (umidade relativa = 60%) com as seguintes frações molares:

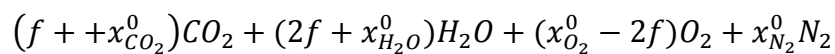
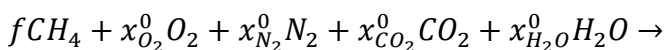
$$x_{O_2}^0 = 0,2059; \quad x_{N_2}^0 = 0,7748; \quad x_{CO_2}^0 = 0,0003; \quad x_{H_2O}^0 = 0,0190;$$

Neste ambiente de referência, a exergia e energia de cada substância são nulas. Para cálculos de balanço de energia, esse ambiente de referência é consistente com a definição de PCI.

- Composição química dos fluxos:

Os fluxos de ar nos pontos 1, 2 e 3 possuem a mesma composição do ambiente de referência.

O combustível é assumido como metano puro. Na câmara de combustão, assume-se que ocorre a combustão completa, de acordo com a seguinte reação:



Nesta reação,  $f$  representa a razão molar combustível/ar. As massas moleculares do combustível (metano) e do ar são  $M_{CH_4} = M_f = 16,043$  kg/kmol e  $M_a = 28,648$  kg/kmol, respectivamente.

Exergia específica e valores energéticos:

Exergia específica do metano:

$$e_f = 51850 \text{ kJ/kg} \tag{3.23}$$

Energia específica do metano:



$$h_f = PCI = 50000 \text{ kJ/kg} \quad (3.24)$$

Energia e exergia adicionadas no sistema água/vapor:

$$e_9 - e_8 = h_9 - h_8 - T_0(s_9 - s_8) = 909,1 \text{ kJ/kg} \quad (3.25)$$

$$e_9 - e_{8p} = h_9 - h_{8p} - T_0(s_9 - s_{8p}) = 754 \text{ kJ/kg} \quad (3.26)$$

$$h_9 - h_8 = 2686,3 \text{ kJ/kg} \quad (3.27)$$

$$h_9 - h_{8p} = 1956 \text{ kJ/kg} \quad (3.28)$$

Energia e exergia específicas dos fluxos de ar, com  $i = 1, 2, 3$ :

$$e_i = c_{P,a} \left( T_i - T_0 - T_0 \ln \frac{T_i}{T_0} \right) + R_g T_0 \ln \frac{P_i}{P_0} \quad (3.29)$$

$$h_i = c_{P,a} (T_i - T_0) \quad (3.30)$$

Energia e exergia específicas dos fluxos de gás, para  $i = 4, 5, 6, 7$  e para representar as substâncias  $s = O_2, CO_2, N_2, H_2O$ :

$$e_i = c_{P,g} \left( T_i - T_0 - T_0 \ln \frac{T_i}{T_0} \right) + R_g T_0 \ln \frac{P_i}{P_0} + R_g T_0 \sum_s x_s^i \ln \frac{x_s^i}{x_s^0} \quad (3.31)$$

$$h_i = c_{P,g} (T_i - T_0) \quad (3.32)$$

### 3.4. MODELO ECONÔMICO

Para a definição do modelo econômico, é necessário considerar os custos anuais de combustível e os custos associados à aquisição, operação e manutenção de cada componente da planta. As expressões que representam custos associados à aquisição são apresentadas abaixo:

As variáveis  $\Delta T$ ,  $\dot{Q}$  e  $U$  significam, respectivamente, a diferença de temperatura média logarítmica, a taxa de transferência de calor e o coeficiente global de transferência de calor.

Os valores adotados para as constantes  $C_{ij}$  são apresentados na tabela 1.

Tabela 1- Parâmetros para o modelo econômico do problema CGAM

Equipamento	Valores das constantes Cij	
Compressor de Ar	$C_{11} = 39,5 \text{ \$/}(kg/s)$	$C_{12} = 0,9$
Pré-Aquecedor	$C_{21} = 2290 \text{ \$/}(m^{1,2})$	$U = 18 \text{ kW}/(m^2K)$
Câmara de Combustão	$C_{31} = 25,6 \text{ \$/}(kg/s)$ $C_{33} = 0,018 \text{ K}^{-1}$	$C_{32} = 0,995$ $C_{34} = 26,4$
Turbina a Gás	$C_{41} = 266,3 \text{ \$/}(kg/s)$ $C_{43} = 0,036 \text{ K}^{-1}$	$C_{42} = 0,92$ $C_{44} = 54,4$
Caldeira de Recuperação	$C_{51} = 3650 \text{ \$/}(kW/K)^{0,8}$ $C_{53} = 658 \text{ \$/}(kg/s)^{1,2}$	$C_{52} = 11820 \text{ \$/}(kg/s)$

A taxa de custo de cada componente (em \$/s), levando em consideração o investimento e a manutenção do mesmo, é calculada por:

$$\dot{Z}_r = FRC \cdot \phi \cdot Z_r / (t * 3600) \quad (3.38)$$

O subscrito “r” representa o componente em análise. As variáveis FRC,  $\phi$  e t representam, respectivamente, o fator de recuperação de capital (FRC = 18,2%), o custo de manutenção ( $\phi=1,06$ ) e o número de horas de operação da planta (t=8000h).

Considerando o custo de combustível por unidade de exergia  $c_f = 0,004 \text{ \$/MJ}$ , define-se o custo anual associado ao consumo de combustível por:

$$\dot{Z}_f = c_f \cdot \dot{m}_f \cdot PCI \quad (3.39)$$

### 3.5. FUNÇÃO OBJETIVO

A otimização do problema consiste em minimizar os custos de operação total da planta assumindo uma taxa de produção de eletricidade e vapor fixos. Logo, a função objetivo, sujeita as restrições impostas pelo modelo físico, termodinâmico e econômico do problema, pode ser representada pela função  $F_{CGAM}$ :

$$F_{CGAM} = \dot{Z}_T = \dot{Z}_F + \dot{Z}_{CA} + \dot{Z}_{PA} + \dot{Z}_{CC} + \dot{Z}_{TG} + \dot{Z}_{GV} \quad (3.40)$$

A função objetivo também pode ser representada pelo custo total anual:

$$F_{CGAM} = Z_T = (t * 3600)\dot{Z}_F + FRC. \phi. (Z_{CA} + Z_{PA} + Z_{CC} + Z_{TG} + Z_{GV}) \quad (3.41)$$

### 3.6. RESTRIÇÕES DE DESIGUALDADE

No pré-aquecedor, a temperatura de saída do ar  $T_3$  é maior do que a temperatura na entrada  $T_2$ . Além disso, a temperatura do gás na entrada  $T_5$  deve ser maior do que  $T_3$ . Porém, por ser uma variável de decisão, é possível que sejam atribuídos valores a  $T_3$  que não satisfaçam essas condições básicas. Logo, as seguintes restrições são necessárias:

$$T_3 - T_2 \geq 0 \quad (3.42)$$

$$T_5 - T_3 \geq 0 \quad (3.43)$$

Além disso, do mesmo modo que a equação (3.43) foi definida, é necessário fazer o mesmo para o outro lado do pré-aquecedor, já que a temperatura  $T_2$  é função das variáveis de decisão  $\eta_{CA}$  e  $r_c$ , podendo assumir valores absurdos.

$$T_6 - T_2 \geq 0 \quad (3.44)$$

Na caldeira de recuperação, para que haja troca de calor, é necessário que a temperatura de entrada seja maior que a de saída e que a temperatura do gás seja sempre maior do que a da água e do vapor. Logo, são definidas as seguintes restrições:

$$T_6 - T_7 \geq 0 \quad (3.45)$$

$$T_6 - T_9 \geq 0 \quad (3.46)$$

$$T_{7p} - T_9 \geq 0 \quad (3.47)$$

Obviamente, na câmara de combustão, o gás deve sair a uma temperatura maior do que o ar que entrou. Como ambas são variáveis de decisão, é possível o programa atribuir valores que não satisfazem a teoria. Portanto, deve-se adicionar mais uma restrição ao problema:

$$T_4 - T_3 \geq 0 \quad (3.48)$$

Também é necessário restringir a vazão mássica do ar, para que seja sempre positiva.

As outras vazões mássicas são dependentes desta.

$$\dot{m}_a \geq 0 \tag{3.49}$$

## 4. ALGORITMOS DOS PROGRAMAS

Neste capítulo, serão descritos os algoritmos utilizados para desenvolver os dois programas, primeiramente o que utiliza o método dos pontos interiores explicitamente e outro que utiliza a função *fmincon*, do software MATLAB. Além disso, é apresentada também a teoria que o *fmincon* utiliza para o método em questão, baseada na descrição do site MathWorks. Todos os códigos, principais e auxiliares, encontram-se no apêndice do trabalho. A partir deste capítulo, os programas são denominados “Explícito” e “Fmincon”, para facilitar a diferenciação entre os dois.

### 4.1. PROGRAMA “FMINCON”

#### 4.1.2. ALGORITMO DO PROGRAMA

O algoritmo utilizado para otimizar o problema é descrito abaixo, para explicar o passo-a-passo da função *fmincon*.

Inicialmente, definem-se os valores iniciais das variáveis de decisão e seus limites superior e inferior. É possível definir também o valor inicial do parâmetro de barreira  $\mu$ . Com estes valores definidos, iniciam-se as iterações.

Dentro da iteração, o programa monta o seguinte sistema de equações  $Ax = b$ :

$$\begin{bmatrix} W_k & 0 & \nabla c_h^T & \nabla c_g^T \\ 0 & S\Lambda & 0 & -S \\ \nabla c_h & 0 & I & 0 \\ \nabla c_g & -S & 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_k^x \\ d_k^s \\ d_k^y \\ d_k^\lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f - \nabla c_h^T y - \nabla c_g^T \lambda \\ S\lambda - \mu e \\ h \\ g + s \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Para isso, é necessário calcular os jacobianos das restrições de igualdade  $\nabla c_h$  e de desigualdade  $\nabla c_g$ , o gradiente da função objetivo  $g$ , o hessiano do lagrangiano  $W_k$ , enquanto  $S = \text{diag}(s)$  e  $\Lambda = \text{diag}(\lambda)$ . O parâmetro  $y$  representa o multiplicador de Lagrange associado com as restrições de igualdade.

Antes de resolver o sistema, o programa faz uma decomposição LDL da matriz, ou seja,  $A = LDL^T$ , onde  $L$  é uma matriz triangular inferior com a diagonal principal com valor unitário e  $D$  é uma matriz diagonal. A intenção desta transformação é analisar se a matriz hessiana projetada  $D$  é definida positiva, antes de prosseguir com o

passo direto, calculado através da solução do sistema (4.1). Caso a matriz hessiana projetada não seja definida positiva, o programa calcula o passo através do método do gradiente conjugado.

Neste método, faz-se uma aproximação da notação do problema (2.4) para problema de programação quadrática, ou seja, minimizar uma função quadrática de múltiplas variáveis sujeitos às restrições, do formato:

$$\text{Min. } \nabla f^T d_k^x + \frac{1}{2} (d_k^x)^T W_k d_k^x + \mu e^T S^{-1} d_k^s + \frac{1}{2} (d_k^s)^T S^{-1} \Lambda d_k^s \quad (4.2a)$$

$$\text{S.a. } g(x) + \nabla c_g(d_k^x) + d_k^s = 0 \quad (4.2b)$$

$$h(x) + \nabla c_h(d_k^x) = 0 \quad (4.2c)$$

Para obter convergência em pontos remotos e permitir o caso em que o hessiano não é definido positivo, é introduzido uma região de confiança  $\Delta$ , para obter a seguinte condição a ser acrescentada no problema (4.2):

$$|d|_T \leq \Delta \quad (4.3)$$

Na equação (4.3),  $|\cdot|_T$  é a norma euclidiana ou  $l_2$ . Se o passo encontrado não satisfazer a essas condições, diminui-se o tamanho da região  $\Delta$ . Após definido um passo que atende as condições, a região de confiança deve ser recalculada para o novo ponto.

O método utilizado para minimizar a função (4.2) sujeito a (4.3) é baseado no trabalho de Byrd *et. al* (2006). Basicamente, é definido um passo parcial  $v_k$  para resolver aproximadamente o problema abaixo:

$$\text{Min. } |g_k + s_k + \nabla c^T v_x + v_s| \quad (4.4a)$$

$$\text{S.a. } |(v_x, \tilde{D}_k v_s)|_T \leq \tilde{\Delta}_k \quad (4.4b)$$

Os parâmetros na equação (4.4b) são definidos por  $\tilde{\Delta}_k = \xi \Delta_k$  para  $\xi \in (0,1)$ ,  $\tilde{D}_k = \tilde{\delta}_k S_k^{-1}$  para  $\tilde{\delta}_k = \max(\beta, \tilde{\Delta}_k)$ , com  $\beta > 0$ .

Depois, calcula-se o passo total ao resolver aproximadamente:

$$\text{Min. } \nabla f^T d_k^x + \frac{1}{2} (d_k^x)^T W_k d_k^x + \mu e^T S^{-1} d_k^s + \frac{1}{2} (d_k^s)^T S^{-1} \Lambda d_k^s \quad (4.5a)$$

$$\text{S.a. } \nabla c_g(d_k^x) + d_k^s = \nabla c_g(v_x) + v_s \quad (4.5b)$$

$$|(v_x, \tilde{D}_k v_s)|_T \leq \tilde{\Delta}_k \quad (4.5c)$$

Depois de aplicado o passo, o resultado é comparado com a função de mérito do programa. Caso o ponto seja aceito, o programa entra em uma nova iteração, com a tentativa de dar um passo direto. Caso não seja aceito, a região de confiança é diminuída e o processo de encontrar um passo pelo método do gradiente conjugado se repete.

#### 4.1.3. COMPOSIÇÃO DO PROGRAMA

O programa é composto por quatro rotinas, sendo uma a principal e quatro auxiliares.

#### 4.1.4. ROTINA PRINCIPAL

Responsável por chamar a função *fmincon*, após definir os parâmetros requeridos para a utilização da mesma. Além disso, define o valor inicial das variáveis de decisão, seus limites superior e inferior e uma variável “histórico”, que durante as iterações, armazenará todos os valores de  $x$  e da função objetivo.

Também é responsável por chamar as funções *FuncObj* e *RestDesig*, que definem a função objetivo e as restrições de desigualdade do problema, respectivamente. Após o retorno da função *fmincon*, este programa mostra a solução e o valor mínimo da função objetivo obtida.

#### 4.1.5. ROTINA FUNC OBJ

Tem como principal objetivo definir a função objetivo do problema e seu gradiente. Além disso, é responsável por atribuir valores a todos os parâmetros fixos (termodinâmicos e econômicos) que também serão usados na rotina *RestDesig*.

Determina a expressão da função objetiva em função das variáveis de decisão simbólica, através da modelagem apresentada no capítulo 3. Após a definição da função, calcula-se analiticamente o gradiente.

#### 4.1.6. ROTINA FUNCOBJ

Responsável por aplicar os valores das variáveis de decisão nas expressões simbólicas obtidas na rotina FuncObjSyms. Esta é a função a ser otimizada que será aplicada na função *fmincon*.

#### 4.1.7. ROTINA RESTDESIG

Responsável por definir as restrições determinadas no tópico 3.6. O programa utiliza as variáveis determinadas pela rotina FuncObj.

O programa monta as restrições de desigualdade em função de  $x$ , e retorna estas funções para o programa principal, que será aplicado na função *fmincon*.

#### 4.1.8. ROTINA PRINTPROB

A rotina é chamada a cada iteração do *fmincon*, para atualizar o valor da variável “histórico” com os novos valores das variáveis de decisão e da função objetivo. Além disso, esses valores também são printados a cada iteração.

### 4.2. PROGRAMA “EXPLÍCITO”

#### 4.2.1. ALGORITMO DO PROGRAMA

Primeiramente, são definidos os parâmetros de otimização necessários para o problema, como o valor do parâmetro de barreira e a tolerância. Então, são definidos os valores iniciais e os limites das variáveis de decisão. São determinados também os limites superior e inferior das restrições de desigualdade.

O programa define analiticamente a função objetivo e seu gradiente, e as restrições e seu jacobiano.

Variáveis de folga são atribuídas a cada restrição, de modo que o problema fique similar às equações (2.3). Também se definem os multiplicadores de fronteira  $z_L$  e  $z_U$ .

Os multiplicadores de Lagrange são inicializados pela equação (2.27), para que a

determinação do hessiano da função objetivo seja possível. Define-se o valor inicial o filtro, com  $\theta = \theta^{max}$  e  $\varphi = \varphi(x_0, s_0)$ . Logo após, iniciam-se as iterações.



Dentro das iterações, o algoritmo define as matrizes diagonais necessárias e a matriz  $\Sigma_k$ . Com todos os valores definidos, a rotina resolve o sistema de equações (2.12), encontrando a direção de procura. Logo após, o tamanho dos passos é definido pelas equações (2.16) e define-se um novo ponto pelas equações (2.15).

Com o novo ponto determinado, o mesmo deve ser aceito pelo filtro imposto. Caso não seja aceito, o problema passa por uma correção de segunda ordem (tópico 2.4.3.5). Após a correção, o ponto é novamente testado com o filtro. Se o mesmo for rejeitado novamente, o passo não será aceito, reiniciando a iteração, porém o filtro é aumentado de acordo com a equação (2.36) e o passo máximo  $\alpha_{max} \in (0,1)$  é diminuído de acordo com a seguinte expressão (onde  $l$  representa o número de vezes que o algoritmo falhou):

$$\alpha_{max} = 2^{-l} \alpha_{max} \quad (4.6)$$

Caso o novo ponto não seja rejeitado pelo filtro, o mesmo será aceito, o passo máximo é reinicializado para o valor unitário, é feita a análise do critério para diminuição do parâmetro de barreira e do critério de parada, de acordo com os tópicos 2.4.2.3 e 2.4.2.4, respectivamente. Caso o critério de parada seja atingido, o programa termina, encontrando o ponto ótimo.

Antes de reiniciar a iteração, o programa printa e armazena os valores das variáveis de decisão, da função objetivo e do parâmetro de barreira.

#### **4.2.2. COMPOSIÇÃO DO PROGRAMA**

O programa é composto por uma rotina principal e 11 rotinas auxiliares. Este tópico descreve brevemente cada rotina, que podem ser encontradas no apêndice.

#### **4.2.3. ROTINA PRINCIPAL**

Responsável por inicializar todos os parâmetros de otimização, assim como os valores iniciais das variáveis de decisão, dos multiplicadores de Lagrange e de fronteira. Além disso, chama as funções para determinar a função objetivo, o gradiente e hessiano da mesma, e as restrições de desigualdade com seu

jacobiano. Também é responsável por inicializar o filtro da função.

#### **4.2.4. ROTINA OTIMIZAR**

Sua principal característica é minimizar a função objetivo através da teoria apresentada no capítulo 2 e do algoritmo apresentado neste capítulo. A função recebe os parâmetros e equações da função principal, e cada iteração visa encontrar um ponto novo melhor do que o antigo. Ao final das iterações, o programa retorna à rotina principal todos os valores das variáveis de decisão, da função objetivo, dos multiplicadores de Lagrange e das variáveis de folga encontrados, inclusive a solução do problema.

#### **4.2.5. ROTINA CRIAROBJGRAD**

Similar à rotina FuncObj do programa anterior, é responsável por determinar a função objetivo e o gradiente da mesma para a otimização do problema. Também são definidos todos os parâmetros necessários discutidos na modelagem do problema. Tais parâmetros são feitos no formato “global”, de modo que possam ser utilizados na rotina CriarRestJac.

#### **4.2.6. ROTINA CRIARRESTJAC**

É a rotina responsável por definir as restrições de desigualdade do problema, definidas no tópico 3.6, e também calcula o jacobiano das mesmas. As equações resultantes são todas simbólicas, de modo que os valores das variáveis de decisão devem ser aplicados nas expressões para obter seus valores.

#### **4.2.7. ROTINA CRIARHESS**

Esta rotina define analiticamente o hessiano da função de Laplace da função objetivo. Para isso, a mesma necessita da função objetivo e das restrições de desigualdade na forma simbólica.

#### **4.2.8. ROTINA JACOB**

Necessária para ampliar o jacobiano calculado anteriormente, para que o mesmo possua os valores referentes às variáveis de restrição. Para isso, adiciona-se uma matriz diagonal, com valores unitários negativo, ao jacobiano.

#### 4.2.9. ROTINA PHI

Esta rotina tem como objetivo calcular a função  $\varphi$ , um dos fatores do filtro que será responsável por aceitar pontos no algoritmo. Definida na equação (2.24a), nota-se que como as restrições de desigualdade não possuem limites superior, o mesmo se aplica para as variáveis de folga, removendo a parcela  $s_U - s$  do cálculo de  $\varphi$ .

#### 4.2.10. ROTINA RESÍDUO

Responsável por transformar a representação do sistema, do formato apresentado nas equações (2.1) para as equações (2.3). Para isso, é feita a diferença entre o valor das restrições de desigualdade, em um ponto  $x$ , e os valores das variáveis de folga.

#### 4.2.11. ROTINA THETA

Utilizada para determinar o fator  $\theta$  no filtro do problema, que corresponde a violação das restrições de desigualdade, através da soma dos módulos de cada resíduo.

#### 4.2.12. ROTINA SOC

Quando um ponto não é aceito pelo filtro depois de um passo, esta rotina é chamada, de modo a alterar o ponto obtido, de acordo com o tópico 2.4.3.5. Para isso, a matriz  $b$  é recalculada e um novo passo é encontrado através da solução de (2.40). O passo é limitado para que nenhuma variável ultrapasse seus limites, e então o programa retorna o novo ponto para a rotina Otimizar, onde o mesmo ainda será testado pelo filtro.

#### 4.2.13. ROTINA TESTEFILTRO

Contém o filtro do problema, ao qual o ponto deve satisfazer para que o passo seja aceito. A rotina recebe as variáveis de decisão e de folga, utilizando as outras funções Theta e Phi para fazer uma comparação com o filtro em atividade. É retornado para o programa principal um indicador de que o ponto foi aceito ou não.

#### 4.2.14. ROTINA PRINTPROB

Similar à rotina do programa “Fmincon”, serve para printar os resultados obtidos a cada iteração. A diferença é que esta não possui uma variável “histórico” que contém

todos os valores já obtidos, pois esta variável está na rotina Otimizar.

## 5. RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos por cada um dos programas de otimização apresentados neste trabalho. É feita uma comparação entre os dois métodos, sendo também comparados com o valor ótimo de referência, apresentada por VALERO *et al* (1994a). Neste capítulo, os programas são denominados “Explícito” e “Fmincon”, para facilitar a diferenciação entre os dois.

### 5.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Para a análise dos resultados obtidos, é calculado o desvio dos valores das variáveis ao final do processo em relação à solução ótima de referência. O desvio relativo é determinado pela seguinte expressão:

$$\delta(\%) = 100 * \left| \frac{v_{final} - v_{ref}}{v_{ref}} \right| \quad (6.1)$$

Para a aplicação do método dos pontos interiores, é necessário definir os limites superior e inferior para cada variável. Para este trabalho, as restrições adotadas são as seguintes:

**Tabela 2 - Limites superior e inferior das variáveis de decisão**

Limite Inferior	Variável	Limite Superior
2	$r_c$	20
0,1	$\eta_{CA}$	0,89
0,1	$\eta_{TG}$	0,91
500	$T_3$	1500
1000	$T_4$	2000

Além disso, é necessário que os dois programas inicializem em um mesmo ponto  $x_0$ . Portanto, são adotados os mesmos pontos iniciais para os dois programas, que são apresentados na Tabela 3.

**Tabela 3 - Valores iniciais das variáveis de decisão**

Variável	Caso 1	Caso 2
$r_c$	7,5	9
$\eta_{CA}$	0,75	0,72
$\eta_{TG}$	0,75	0,76
$T_3$	850	780
$T_4$	1300	1220

Ambos os programas foram executados em um processador 1.60GHz Intel® Core™ i5 -4200U. Os tempos necessários para o processamento de cada código são apresentados junto com os resultados.

Para a utilização do algoritmo no programa com método explícito, foi necessário adotar valores para os parâmetros arbitrários definidos no capítulo 2. Os valores escolhidos estão apresentados na tabela 4.

**Tabela 4 - Valores iniciais para os parâmetros arbitrários**

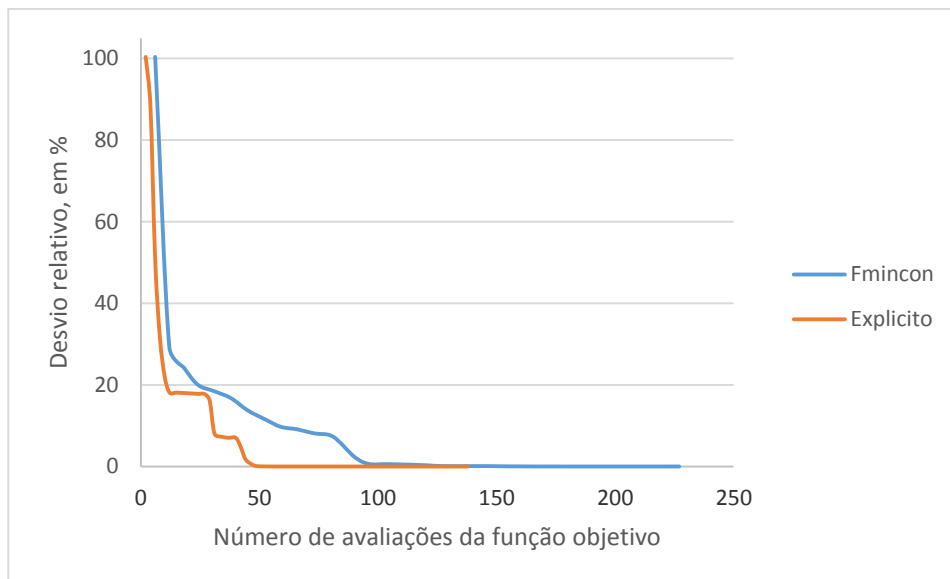
Parâmetros arbitrários	Valores atribuídos
$\mu_0$	10
$\tau_{min}$	0,99
$s_{max}$	100
$k_{\epsilon}$	5
$\theta_{\mu}$	1,5
$\epsilon_{tol}$	$10^{-4}$
$\gamma_{\theta}, \gamma_{\varphi}$	$10^{-5}$

## 5.2. RESULTADOS PARA O CASO 1

No caso 1, o programa “Fmincon” otimizou a função objetivo em aproximadamente 10 segundos. Enquanto isso, o programa “Explícito” precisou de aproximadamente 5 minutos para otimizar o problema.

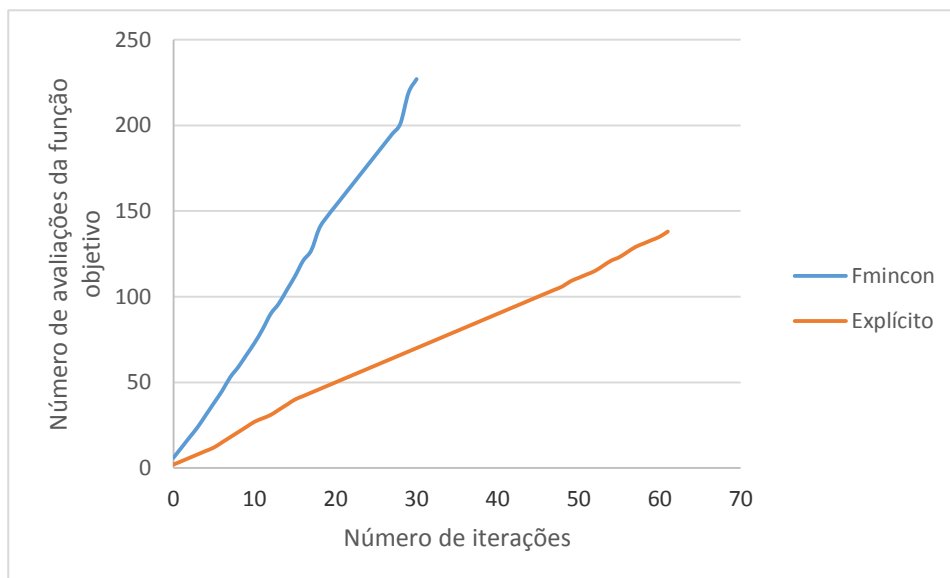
A figura 2 apresenta a evolução do processo de otimização de acordo com o número de avaliações da função objetivo de cada algoritmo. Inicialmente, o ponto se encontra em uma região com um desvio de aproximadamente 100,42% em relação à solução da função objetivo. Note que logo nas primeiras avaliações, ambos programas decrescem rapidamente, encontram a solução com aproximadamente 60 avaliações.

**Figura 3 - Desvio da Função Objetivo ao longo da otimização – Caso 1**



A figura 3 apresenta o número de avaliações da função objetivo em função do número de iterações.

**Figura 4 - Nº de avaliações da Função Objetivo ao longo da otimização – Caso 1**



Pode-se observar que a função “Fmincon” apresenta um gráfico com maior inclinação do que o outro programa. Isso acontece devido aos diferentes métodos adotados para calcular o gradiente da função objetivo em cada programa. Enquanto o programa “Explícito” o calcula analiticamente no começo do problema, o outro programa utiliza a função objetivo diversas vezes em uma iteração, de modo a calcular o gradiente numericamente. Mesmo assim, devido a maior dificuldade de

trabalhar com variáveis simbólicas e de calcular o gradiente analiticamente, o problema “Explícito” requer um esforço computacional significativamente maior do que o outro para uma mesma quantidade de iterações.

A tabela 5 apresenta os resultados obtidos em cada programa para as variáveis de decisão. A tabela também apresenta os valores da solução original do problema, e os desvios dos resultados obtidos em relação a mesma. Os valores ótimos dos programas comparados entre si foram muito próximos, sendo que o desvio entre os mesmos é da ordem de  $10^{-6}$ .

Os resultados obtidos foram satisfatórios, com a relação de pressão  $r_c$  apresentando o maior desvio dos valores de referência, 0,1964%.

**Tabela 5 - Valores ótimos das variáveis - Caso 1**

Variáveis	Valero <i>et al.</i> (1994)	Fmincon		Explícito	
		$V_{final}$	$\delta$ (%)	$V_{final}$	$\delta$ (%)
$r_c$	8,523400	8,506675	0,1962	8,506664	0,1963
$\eta_{CA}$	0,846800	0,846727	0,0086	0,846727	0,0086
$\eta_{TG}$	0,878600	0,878720	0,0136	0,878720	0,0137
$T_3$	914,280000	914,079755	0,0219	914,079931	0,0219
$T_4$	1492,630000	1492,411381	0,0146	1492,411519	0,0146

A tabela 6 apresenta os custos associados a cada equipamento e ao combustível obtidos por cada programa, e também a função objetivo. Novamente, foram calculados os desvios de cada resultado. A função objetivo apresentou um desvio de apenas 0,19449%, mesmo com uma variação de ordem maior na relação de pressão.

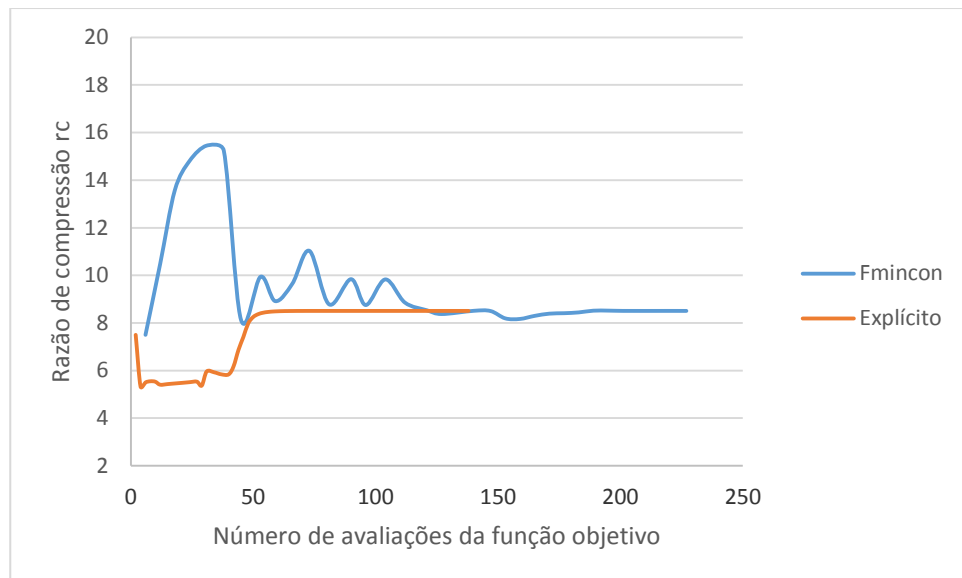
**Tabela 6 - Custos associados aos equipamentos e ao combustível – Caso 1**

Custos Ótimos	Resultado Referencial	Fmincon		Explícito	
		$V_{final}$	$\delta$ (%)	$V_{final}$	$\delta$ (%)
Total (\$/s)	0,362009	0,362079	0,019449	0,362079	0,019449
Combustível (\$/s)	0,325489	0,325586	0,029811	0,325586	0,029811
Compressor de Ar (\$)	1348000	1343456	0,337066	1343456	0,337068
Pré-Aquecedor (\$)	827700	826671	0,124336	826671	0,124337
Câmara de Combustão (\$)	146900	148963	1,404436	148963	1,404423
Turbina a Gás (\$)	1927000	1927313	0,016244	1927313	0,016235
Caldeira de Recuperação(\$)	1202000	1201499	0,041696	1201499	0,041702

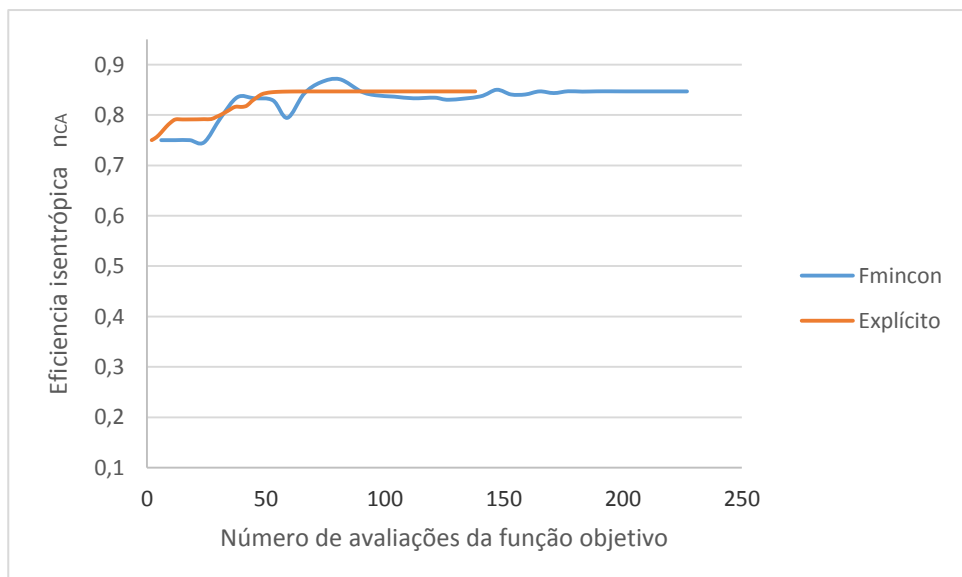


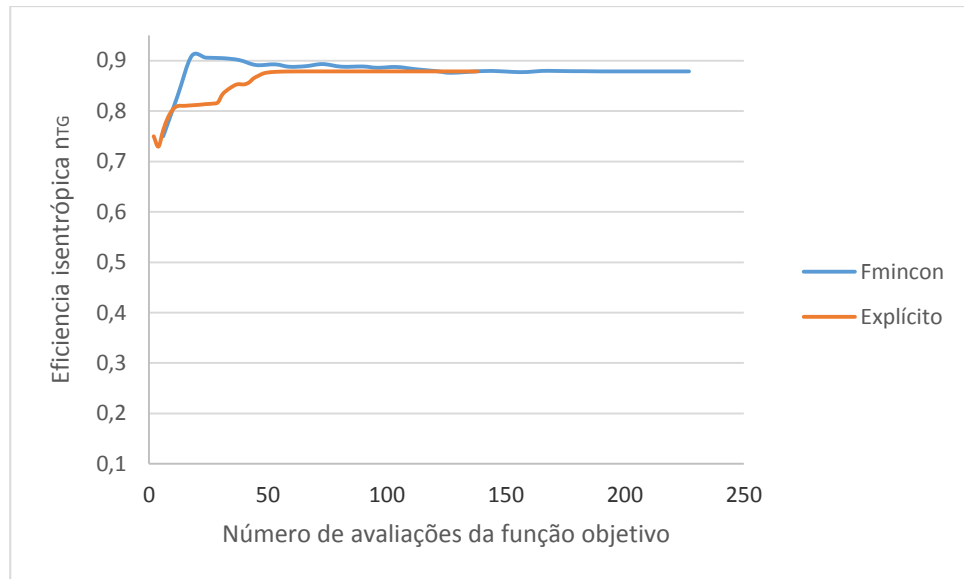
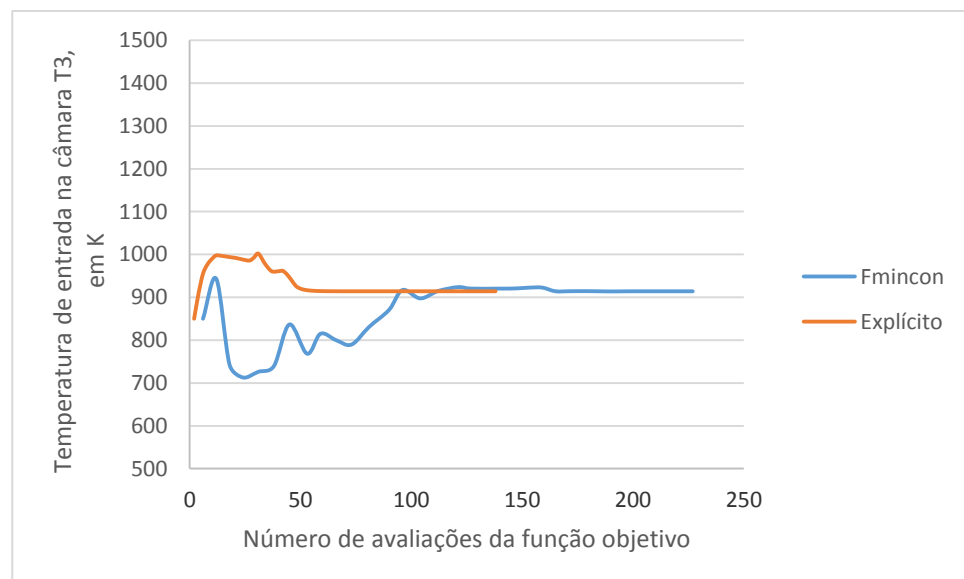
As figuras de 5 a 9 mostram a variação de cada variável paramétrica em função do número de avaliações da função objetivo, mostrando a aproximação dos pontos à solução a medida que o algoritmo otimiza a função objetivo.

**Figura 5 – Razão de compressão x avaliações da função objetivo – Caso 1**

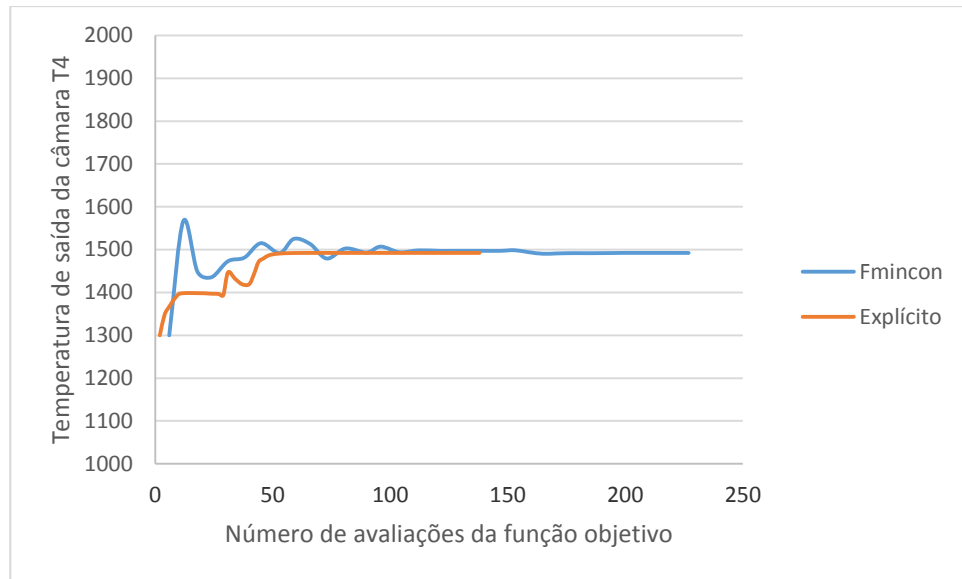


**Figura 6 – Eficiência isentrópica do compressor x avaliações da função objetivo – Caso 1**



**Figura 7 - Eficiência isentrópica da turbina x avaliações da função objetivo – Caso 1****Figura 8 – Temperatura de entrada da câmara x avaliações da função objetivo – Caso 1**

**Figura 9 - Temperatura de saída da câmara x avaliações da função objetivo – Caso 1**

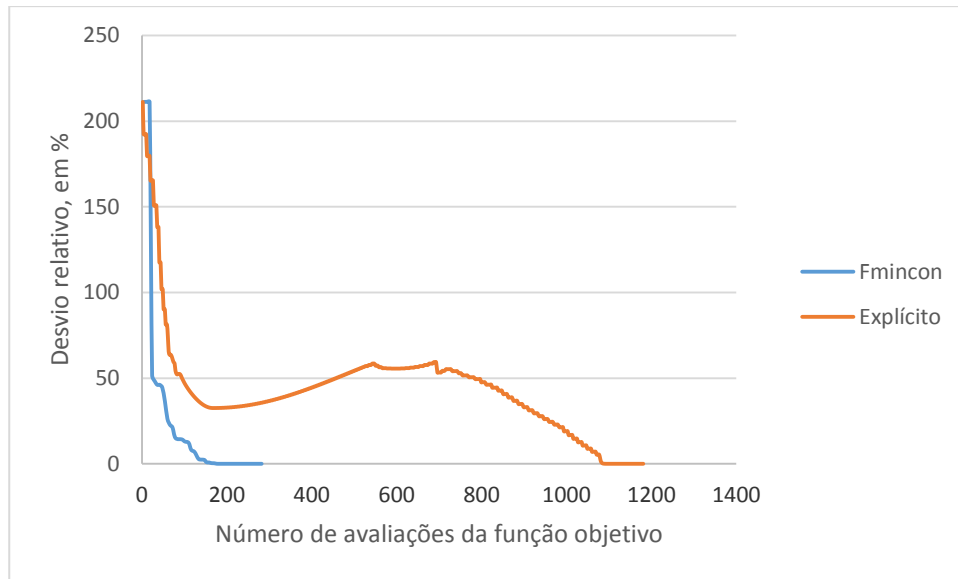


### 5.3. RESULTADOS PARA O CASO 2

Escolhe-se agora um novo ponto inicial, para testar a convergência dos programas partindo de regiões diferentes. Neste caso, o programa “Fmincon” resolve o problema rapidamente outra vez, em aproximadamente 15 segundos. Enquanto isso, o programa “Explícito” encontrou mais problemas para otimizar o problema do que no primeiro caso, precisando de mais do que 1000 avaliações da função objetivo.

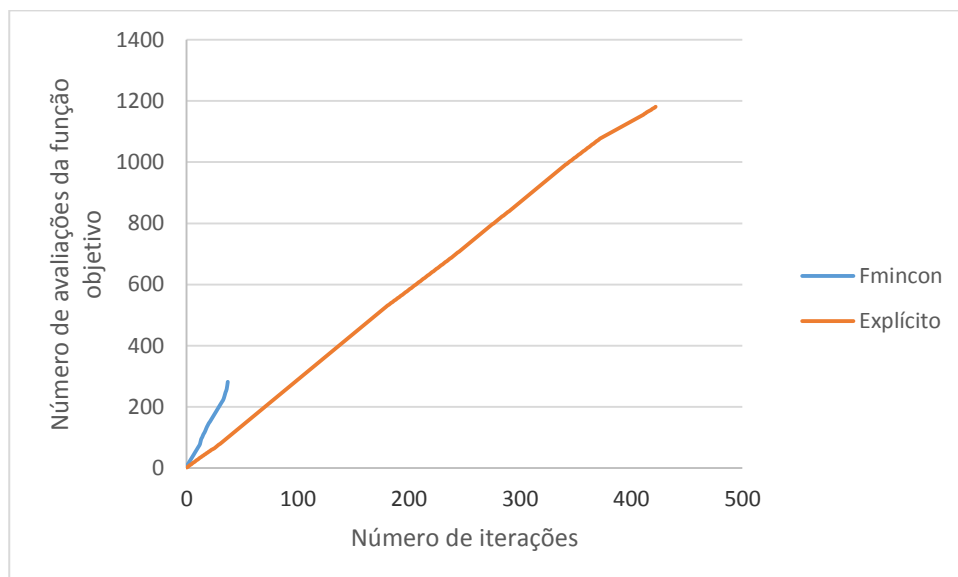
Os progresso dos desvios da função objetivo de cada programa estão representados na figura 10. O ponto inicial possui um desvio de aproximadamente 210%, mais do que o dobro apresentado no caso 1.

**Figura 10 - Desvio da Função Objetivo ao longo da otimização – Caso 2**



Por apresentar ainda mais iterações do que no Caso 1, o programa “Explícito” avalia a função objetivo mais vezes do que anteriormente. O programa “Fmincon” avalia a função objetivo a mesma quantidade de vezes para otimizar ambos os casos.

**Figura 11 - Nº de avaliações da Função Objetivo ao longo da otimização – Caso 2**



A tabela 7 apresenta os valores ótimos obtidos por cada programa, assim como os seus desvios relativos à referência. O programa “Fmincon” encontrou a mesma solução do caso anterior, enquanto o outro encontrou uma variáveis de decisão ótimas diferentes do Caso 1 com a mudança do ponto inicial, com desvios maiores em todas as variáveis exceto a eficiência isentrópica do compressor de ar.

Tabela 7 - Valores ótimos das variáveis - Caso 2

Variáveis	Valero <i>et al.</i> (1994)	Fmincon		Explícito	
		$V_{final}$	$\delta$ (%)	$V_{final}$	$\delta$ (%)
$r_c$	8,523400	8,506675	0,1962	8,506665	0,1963
$\eta_{CA}$	0,846800	0,846727	0,0086	0,846727	0,0086
$\eta_{TG}$	0,878600	0,878720	0,0137	0,878720	0,0137
$T_3$	914,280000	914,079754	0,0219	914,079931	0,0219
$T_4$	1492,630000	1492,411381	0,0146	1492,411519	0,0146

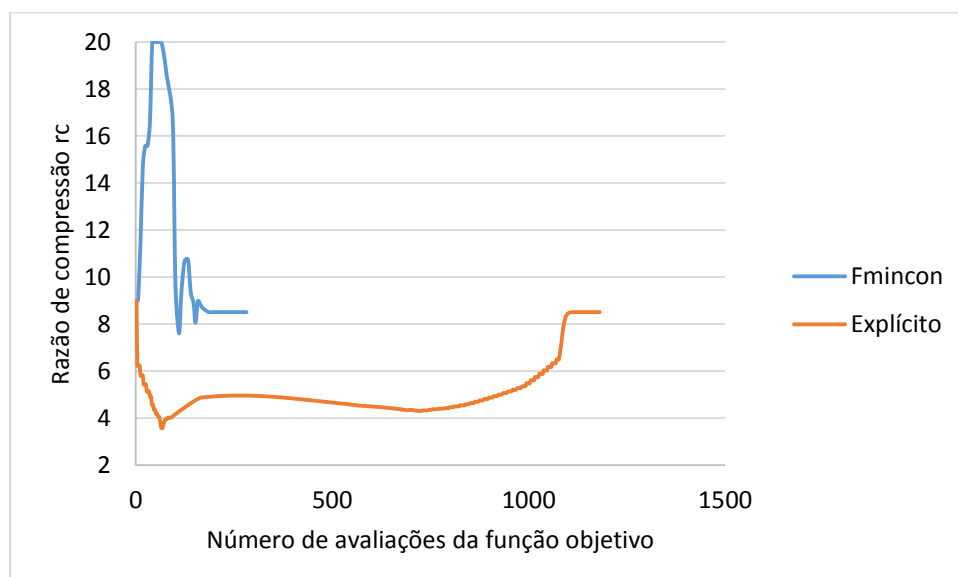
A tabela 8 mostra todos os custos obtidos pelos programas, desde o custo individual de cada equipamento.

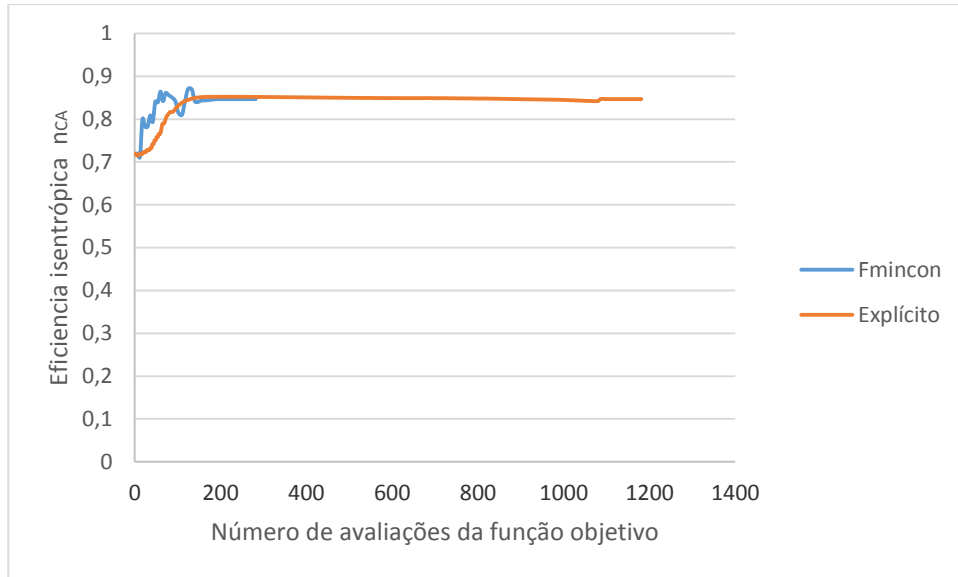
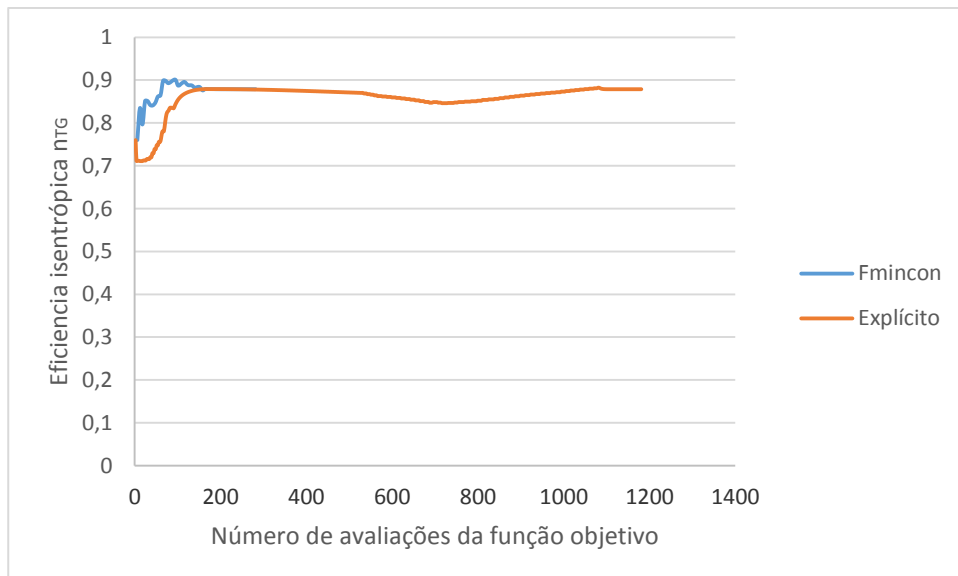
Tabela 8 - Custos associados aos equipamentos e ao combustível – Caso 2

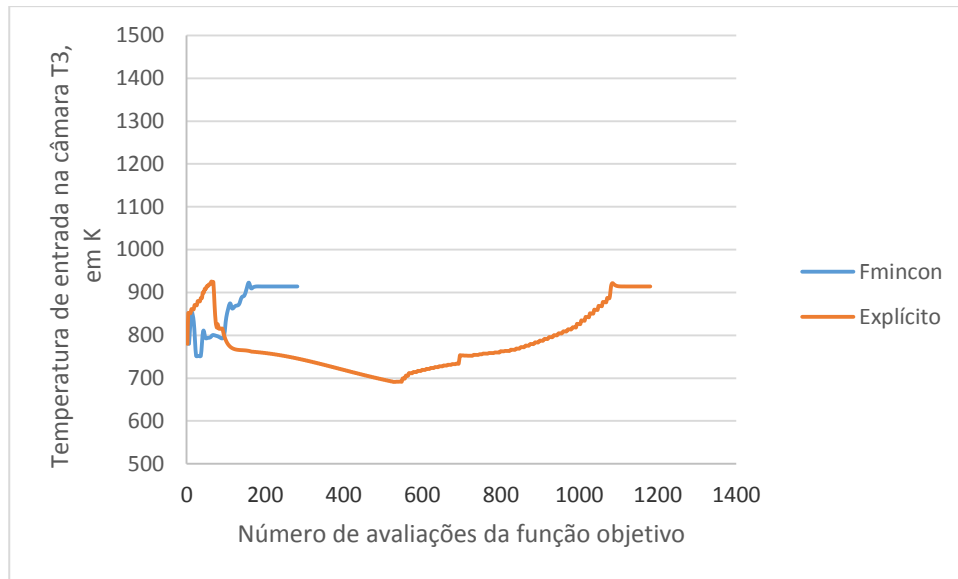
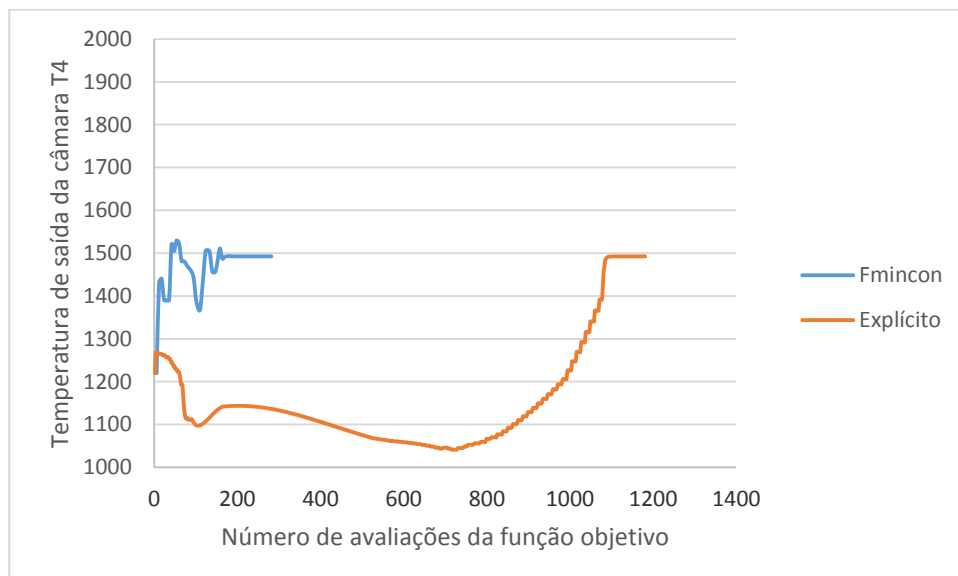
Custos Ótimos	Resultado Referencial	Fmincon		Explícito	
		$V_{final}$	$\delta$ (%)	$V_{final}$	$\delta$ (%)
Total (\$/s)	0,362009	0,362079	0,019449	0,362079	0,019449
Combustível (\$/s)	0,325489	0,325586	0,029811	0,325586	0,029811
Compressor de Ar (\$)	1348000	1343456	0,337066	1343456	0,337066
Pré-Aquecedor (\$)	827700	826671	0,124336	826671	0,124336
Câmara de Combustão (\$)	146900	148963	1,404436	148963	1,404436
Turbina a Gás (\$)	1927000	1927313	0,016244	1927313	0,016244
Caldeira de Recuperação(\$)	1202000	1201499	0,041696	1201499	0,041696

As figuras de 12 a 16 mostram a variação de cada variável paramétrica em função do número de avaliações da função objetivo, mostrando a aproximação dos pontos à solução a medida que o algoritmo otimiza a função objetivo.

Figura 12 - Razão de compressão x avaliações da função objetivo – Caso 2



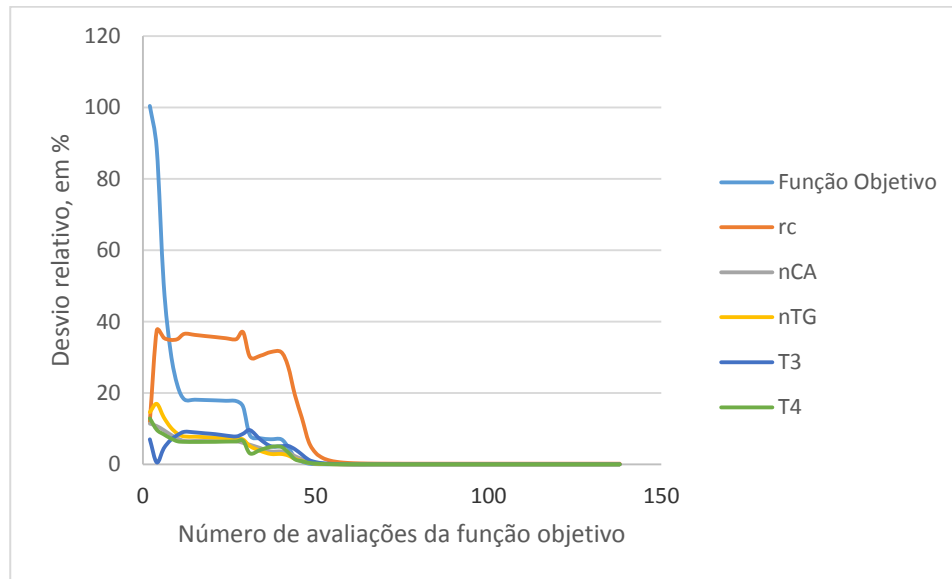
**Figura 13 - Eficiência isentrópica do compressor x avaliações da função objetivo – Caso 2****Figura 14 - Eficiência isentrópica da turbina x avaliações da função objetivo – Caso 2**

**Figura 15 - Temperatura de entrada da câmara x avaliações da função objetivo – Caso 2****Figura 16 - Temperatura de saída da câmara x avaliações da função objetivo – Caso 2**

#### 5.4. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Os valores obtidos para a variável de decisão  $r_c$  durante as iterações do programa explícito, cujos desvios são mostrados na figura 17, são um bom parâmetro para demonstrar a pequena influência que a variável tem quando comparada às outras.

Figura 17 - Desvios de  $r_c$  comparado às outras variáveis de decisão – Caso 1



Quando o programa faz em torno de 40 avaliações, as quatro variáveis exceto a relação de pressão, já assumem valores próximos da solução. Enquanto isso, a variável em destaque possui aproximadamente 30% de desvio do valor de referência. Porém, o desvio calculado para a função objetivo já está próximo de 5%, destacando a pequena influência que a variável possui no objetivo.

Para melhor demonstrar essa sensibilidade, a tabela 9 demonstra a variação da função objetivo na forma  $(F - F^*)/F^*$ , em porcentagem, em função da variação de cada variável de decisão em torno do ponto ótimo obtida pela função "Fmincon". Conforme comentado, a relação de pressão no compressor apresentou a menor variação de resultados na função objetivo.



Tabela 9 - Sensibilidade da função objetivo em função das variável de decisão

Variáveis	$(x_i - x_i^*)/x_i^*$ , em (%)		
	-10	-5	5
$r_c$	0,87922	0,2888	*
$\eta_{CA}$	9,37008	3,49038	*
$\eta_{TG}$	19,7552	7,66893	*
$T_3$	8,53038	3,89983	*
$T_4$	*	*	14,5453

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A motivação principal para esse trabalho era analisar a viabilidade de utilizar o método dos pontos interiores para minimizar os custos de sistemas térmicos.

Para que o algoritmo seja considerado viável neste trabalho, é necessário que o mesmo encontre a solução do problema em questão e também que não necessite de um esforço computacional grande para resolver problemas em sistemas térmicos de baixa complexidade.

Portanto, para a análise desses fatores, deve-se observar principalmente as figuras 6 e 3, para verificar o esforço computacional de cada programa ao resolver o problema, e os desvios relativos apresentados nas tabelas 5 a 8, para determinar se houve a convergência para o resultado ótimo. Além do número de avaliações da função objetiva, também é sugerido analisar o tempo necessário para rodar o programa em um mesmo processador.

Apesar de ambos os algoritmos terem encontrado valores favoráveis para a solução do problema CGAM, o programa “Explícito” necessitou de um esforço computacional maior para atingir resultados com desvios relativos maiores do que o programa “Fmincon”, por isso este último é o único viável para a aplicação no desenvolvimento de software. Além disso, os tempos necessários para rodar cada programa eram drasticamente diferentes, com o “Fmincon” otimizando o problema em menos de 10 segundos, quando comparado aos 5 minutos do “Explícito” para os casos citados neste projeto. Isso acontece pois além de a função *fmincon* ser um código já otimizado para atingir a solução em alta velocidade, o mesmo também calcula o gradiente numericamente, reduzindo drasticamente o esforço necessário.

O trabalho também serviu para fornecer informações teóricas para a disseminação do método dos pontos interiores na otimização de sistemas térmicos. A teoria apresentada neste trabalho auxilia a aplicação do algoritmo em projetos futuros, além de servir como base teórica para o entendimento do possível software a ser desenvolvido.

## 6.1. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Após os resultados obtidos neste trabalho, sugerem-se as seguintes estudos nos próximos projetos:

- Avaliar o desempenho do método dos pontos interiores em comparação com métodos de otimização diferentes. Neste trabalho, os programas só foram comparados entre si, e por apresentarem um algoritmo parecido, seus resultados foram relativamente próximos. Seria interessante uma comparação com métodos diferentes para ajudar a disseminar o algoritmo em otimização de sistemas térmicos.
- Aplicação do método e programas computacionais em um sistema CGAM modificado com modelagem mais próxima de instalações térmicas reais, para garantir a viabilidade do método para sistemas térmicos reais.
- Aplicação do algoritmo em sistemas térmicos mais complexos do que o apresentado neste trabalho, de modo a ter uma análise melhor da robustez do programa e de seu esforço computacional na solução de problemas maiores.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABUSOGLU, A.; KANOGLU, M., (2009), **Exergoeconomic analysis and optimization of combined heat and power production: A review**, Renewable and Sustainable Energy Reviews 13, pp. 2295-2308.
- BEJAN, A.; TSATSARONIS, G.; MORAN, M., (1996), **Thermal Design and Optimization**, 1º ed. New York, John Wiley & Sons.
- BYRD, R. H.; GILBERT, J. C.; NOCEDAL, J., (1996), **A Trust Region Method Based on Interior Point Techniques for Nonlinear Programming**. [Research Report] RR-2896, INRIA.
- DUTRA, A. S., (2004), **Método de Pontos Interiores Aplicado a um Problema de Seqüenciamento Job-Shop**, Dissertação (Mestrado), Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia.
- FLETCHER, R., LEYFFER, S., (2002), **Non-Linear Programming without a Penalty Function**, Mathematical Programming 91 , No. 2, pp. 239–269.
- FRANGOPOULOS, C. A., (1994), **Application of the Thermo-economic Functional Approach to the Cgam Problem**, Energy Vol. 19, No. 3, pp. 323-342..
- FRANGOPOULOS, C. A., (2003) **Methods Of Energy Systems Optimization**, OPTI\_Energy Summer School: Gliwice, Poland.
- GILL, P. E.; MURRAY, W.; SAUNDERS, M. A., (1986), **On Projected Newton Barrier Methods for Linear Programming and an Equivalence to Karmarkar's Projective Method**, Mathematical Programming 36, pp.186-209.
- KARMAKAR, N., (1984), **A new polynomial-time algorithm for linear programming**, Combinatorica 4, pp. 373-395.
- LORA, E. E. S.; NASCIMENTO, M. A. R., (2004), **Geração Terméletrica: Planejamento, Projeto e Operação**, Rio de Janeiro, Editora Interciencia, 2 volumes.
- MADSEN, K.; NIELSEN, H. B; TINGLEFF, O., (2004) **Methods for Non-Linear**

**Least Squares Problems**, 2<sup>o</sup> edição.

ROBERE, R., (2012), **Interior Point Method and Linear Programming**, University of Toronto.

SANTOS, J. J. C. S., **Aplicação da Neguentropia na Modelagem Termoeconômica de Sistemas**, Itajubá, 140p. Tese (Doutorado em Conversão de Energia) - Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá. 2009.

TSATSARONIS, G. E PISA, J. (1994). **Exergoeconomic Evaluation and Optimization of Energy System - Application to the CGAM Problem**. Energy Vol. 19, No. 3, pp. 287-321.

VALERO, A., LOZANO, M. A., SERRA, L., TSATSARONIS, G., PISA, J., FRANGOPOULOS, C. E VON SPAKOVSKY, M. R., (1994a) **CGAM Problem: Definition and Conventional Solution**. Energy Vol. 19, No. 3, pp. 279-286.

VALERO, A., LOZANO, M. A. E SERRA, L. (1994b). **Application of the Exergetic Cost Theory to the CGAM Problem**. Energy Vol. 19, No. 3, pp. 365-381.

VON SPAKOVSKY, M. R. (1994). **Application of Engineering Functional Analysis to the Analysis and Optimization of the CGAM Problem**. Energy Vol. 19, No. 3, pp. 343- 364.

WÄTCHER, A., BIEGLER, L. T., (2005), **On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming**, Mathematical Programming 106 , No. 1, pp. 25-57.

WÄTCHER, A., BIEGLER, L. T., (2016). **Site do programa IPOPT**: <https://projects.coin-or.org/lpopt>.

WRIGHT, M., (2004), **The Interior-Point Revolution In Optimization: History, Recent Developments, and Lasting Consequences**, Bulletin of the American Mathematical Society Volume 42 , No. 1, pp. 39–56.