

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROJETO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**CAIO DE REZENDE AYUB
WILZA CARLA DA SILVA PEREIRA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS
COMPRESSÍVEIS NO REGIME TRANSIENTE EM TUBULAÇÕES**

VITÓRIA
2016

**CAIO DE REZENDE AYUB
WILZA CARLA DA SILVA PEREIRA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS
COMPRESSÍVEIS NO REGIME TRANSIENTE EM TUBULAÇÕES**

Projeto de graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Prof. Juan Sérgio Romero Saenz

VITÓRIA
2016

**CAIO DE REZENDE AYUB
WILZA CARLA DA SILVA PEREIRA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS
COMPRESSÍVEIS NO REGIME TRANSIENTE EM TUBULAÇÕES**

Projeto de graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisição parcial para obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

Aprovado em 14 de março de 2016.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Juan Sérgio Romero Saenz
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Orientador

Prof. Marcelo Aiolfi Barone
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Eng. Mecânica Silvana Nunes Barcellos
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Dedicamos este trabalho primeiramente a Deus. Ao Professor Juan Romero, que pacientemente prestou toda sua atenção e seu vasto conhecimento e a todos que nos apoiaram durante a realização do projeto.

RESUMO

O transporte de um fluido em tubulações pode ser analisado através de modelos matemáticos, e aproximando a solução destas equações através de métodos numéricos. A modelagem matemática é importante pois possibilita a implementação de um modelo computacional e conseqüentemente a simulação do fenômeno. A modelagem possui várias aplicações importantes, como a concepção, operação e monitoramento, podendo prever a capacidade nessas tubulações, fornecendo ao engenheiro dados para melhoria do projeto.

A modelagem dos fenômenos associados à dinâmica dos fluidos ganhou um grande impulso com o avanço dos computadores digitais, devido à dificuldade em se obter soluções analíticas, e pela facilidade de aplicação e o baixo custo com relação aos experimentos. A quantificação de variáveis, como pressão temperatura e velocidade máximas e mínimas é de fundamental interesse para o projetista, a fim de que este possa dimensionar a tubulação e introduzir equipamentos protetores, afim de amortecer as variações de carga, prejudiciais à vida útil da instalação. Este trabalho desenvolve um modelo matemático para o fluxo de gás natural em gasodutos, incluindo os efeitos de atrito e transferência de calor na parede da tubulação.

Palavras-chave: Dinâmica de Fluidos Computacional, Modelagem Matemática, Gás Natural.

ABSTRACT

The transport of a fluid in piping may be analyzed using mathematical modeling, and bringing the solution of these equations by numerical methods. Mathematical modeling is important because it enables the implementation of a computational model and consequently the simulation of the phenomenon. The modeling has several important applications such as the design, operation and monitoring, may provide the ability in these pipes, supplying the engineering data for the improvement of the project.

The modeling of the phenomena associated with fluid dynamics gained a major boost with the advancement of digital computers because of the difficulty in obtaining analytical solutions, and the ease of implementation and low cost compared to experiments. Quantification of variables, such as pressure temperature and maximum and minimum speed is of fundamental interest to the designer, so that it can scale the pipe and introduce protective equipment, in order to dampen the load variations, harmful to the life of the facility. This paper develops a mathematical model for natural gas flow in pipelines, including the effects of friction and heat transfer in the pipe wall.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3-1 Volume de Controle Elementar	11
Figura 5-1 Estrutura básica de uma malha unidimensional de volumes finitos	25

LISTA DE SIMBOLOS

Símbolo	Descrição
M	Massa
ρ	Densidade
s	Densidade
V	Volume
U	Velocidade do fluido
A	Área da seção transversal da tubulação
\vec{F}	Força resultante líquida no fluido
g	Aceleração da gravidade local
θ	Ângulo de inclinação
f	Fator de atrito
p	Pressão
μ	Viscosidade dinâmica
u	Velocidade do fluido na direção x
D	Diâmetro da tubulação
τ_{xy}	Tensão de cisalhamento
E	Energia interna
Q	Calor trocado pelo fluido
W	Trabalho envolvendo as forças
e	Energia interna por unidade de massa do fluido
ν	Viscosidade cinemática do fluido
$\dot{Q}_{líq}$	Taxa líquida na qual a energia térmica é gerada
$\dot{W}_{líq}$	Taxa líquida de trabalho efetuada pelas forças
A_{sup}	Área de superfície
T	Temperatura
T_{ref}	Temperatura de referência
h	Entalpia do fluido
U_g	Coefficiente de transferência de calor global
u_m	Velocidade média do fluido sobre a seção transversal da tubulação
\dot{m}	Fluxo de massa
Re	Número de Reynolds
T_i	Temperatura interna da tubulação
T_e	Temperatura externa da tubulação
C_p	Calor específico a pressão constante
Z	Fator de compressibilidade
a_s	Velocidade da onda isentrópica
ϕ	Variável genérica
Γ	Coefficiente de difusão
S_b	Termo fonte
MVF	Método do Volume Finito

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	7
LISTA DE SIMBOLOS.....	8
1 INTRODUÇÃO.....	10
2 OBJETIVOS.....	10
3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS	10
3.1 EQUAÇÕES GOVERNANTES	11
3.2 CONSERVAÇÃO DE MASSA	12
3.3 CONSERVAÇÃO DE MOMENTO	12
3.4 CONSERVAÇÃO DE ENERGIA	13
3.5 FATOR DE ATRITO.....	14
3.6 MODELO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR.....	15
3.7 MODELAGEM DE UM FLUIDO COMPRESSIVEL	15
3.8 MODELO MATEMÁTICO.....	19
4 MODELOS NUMERICO	20
4.1 MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS.....	20
4.2 MÉTODO DE DIFERENCIAIS FINITAS EXPLÍCITAS	21
4.3 MÉTODOS DE DIFERENÇAS FINITAS IMPLÍCITAS.....	22
4.4 MÉTODO DE CRANK-NICOLSON	22
4.5 MÉTODO DE DIFERENÇA CENTRADA.....	23
5 MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS (MVF).....	23
5.1 EQUAÇÃO DE TRANSPORTE	24
5.2 EQUAÇÃO DE DISCRETIZAÇÃO.....	25
5.3 CÁLCULO DOS COEFICIENTES	26
6 GOLPE DE ARÍETE.....	30
6.1 PRINCÍPIOS TEÓRICOS	30
6.1.1 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE.....	30
6.1.2 EQUAÇÃO DO MOMENTO:	31
6.2 MODELAGEM MATEMÁTICA.....	32
6.2.1 DISCRETIZAÇÃO PELO MÉTODOS DOS VOLUMES FINITOS.....	33
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	36
8 REFERÊNCIAS.....	37

1 INTRODUÇÃO

A modelagem computacional é uma área de conhecimento multidisciplinar que trata da aplicação de modelos matemáticos e técnicas da computação à análise, compreensão e estudo da fenomenologia de problemas complexos.

As medições do estado, tais como, a pressão, o fluxo de massa, temperatura e composição são disponíveis apenas na entrada e na saída. Pode-se modelar o escoamento como sendo unidimensional em casos em que os comprimentos das tubulações são bem maiores que seus diâmetros, essa consideração é interessante pois possibilita a obtenção de simulações mais eficientes, a um custo computacional reduzido.

A modelagem transiente proporciona uma análise de escoamento no tempo, possibilitando a simulação computacional do escoamento, que por sua vez pode prever a dinâmica do sistema, tais como alterações variáveis no tempo das taxas de fluxo, composições fluidas, temperatura e mudanças operacionais, maximizando o potencial de produção. Como no simulador OLGA, utilizado por grandes companhias de petróleo.

2 OBJETIVOS

Desenvolver um modelo matemático do fluxo transiente em tubulações, utilizando um sistema de coordenadas unidimensional, incorporando diferentes parâmetros físicos, como fator de atrito e transferência de calor afim de equacionar os transientes hidráulicos em fluidos incompressíveis através da análise do Golpe de Aríete em adutoras. As equações governantes são modeladas numericamente através do método das características e o método dos Volumes finitos.

3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Para modelar o escoamento de fluido em tubulações, faz se necessário resolver as equações da continuidade, dinâmica e conservação de energia para o fluxo, considerando que vários processos físicos têm de ser modelados de maneira apropriada. Esses incluem o fator de atrito, a equação do fluxo de calor trocado

entre o fluido e o meio circundante. Além dessas equações uma equação de estado deve ser utilizada.

A solução das equações governantes para o campo do escoamento dentro das tubulações é determinada pela técnica dos volumes finitos Patankar (1980).

O volume de controle elementar ilustrado na Figura 3-1 é utilizado para encontrar as equações conservativas de conservação de massa, quantidade de movimento linear e energia.

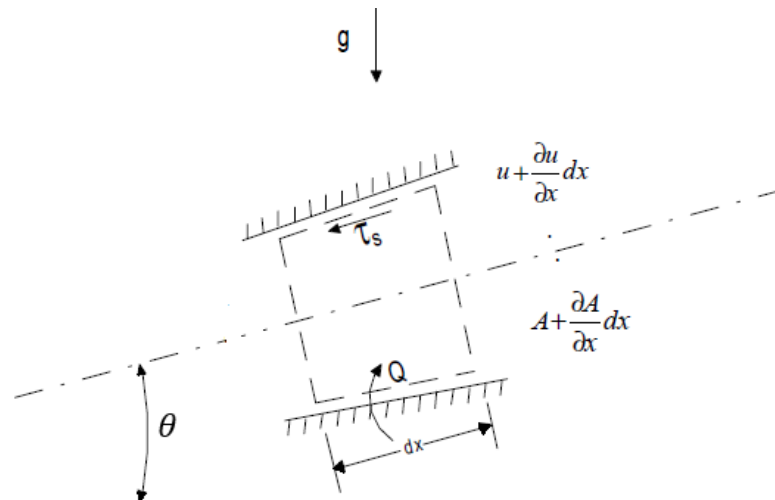


Figura 3-1 Volume de Controle Elementar

3.1 EQUAÇÕES GOVERNANTES

Antes de entrar nos detalhes da equação de Navier-Stokes, é necessário fazer várias suposições acerca dos fluidos. A primeira é que um fluido é um meio contínuo, e que todas as variáveis de interesse, como a velocidade, pressão e temperatura, são funções de campo diferenciáveis.

Utilizaremos os princípios básicos de conservação da massa, momento e energia. Para tornar mais fácil a aplicação destes princípios é útil considerar um volume arbitrário finito, ou seja, volume de controle. O volume de controle permanece fixo no espaço ou pode mover-se como o fluido (Figura 3-1).

3.2 CONSERVAÇÃO DE MASSA

A primeira equação a ser obtida é a equação de conservação de massa, que representa o princípio de conservação de massa. Se o volume de controle é fixado no espaço, podemos aplicar o teorema de transporte de Reynolds, então a equação integral pode ser expressa assim:

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_{sistema} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_A \rho \vec{U} \cdot d\vec{A} \quad (1)$$

Utilizando o teorema integral de Gauss e considerando o fluxo unidimensional, teremos a forma diferencial da equação de conservação de massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

3.3 CONSERVAÇÃO DE MOMENTO

A próxima equação envolve o princípio da conservação da quantidade de movimento, sendo uma aplicação da Segunda Lei de Newton, que é pertinente ao escoamento de um fluido viscoso. Para um volume de controle, essa exigência determina que a soma, de todas as forças atuando no volume de controle, deve ser a taxa líquida na qual o momento deixa o volume de controle.

$$\sum \vec{F} = \left(\frac{dp}{dt}\right)_{sistema} \quad (3)$$

$$\sum \vec{F} = \int_{VC} \frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} dV + \int_{VC} \frac{\partial \rho u}{\partial x} \vec{U} dV \quad (4)$$

Dois tipos de forças podem atuar no fluido, as forças de campo e de superfície.

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{campo} + \vec{F}_{superfície} \quad (5)$$

A força de campo será a força gravitacional, veja Figura 3-1.

$$\vec{F}_{campo} = \vec{g} \sin \theta \, dm = \vec{g} \rho \sin \theta \, dV \quad (6)$$

As forças das superfícies são devidas à pressão estática do fluido, assim como às tensões viscosas.

Utilizando a série de Taylor para tensões, a força líquida de superfície, para o escoamento unidimensional será:

$$F_{superfície} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dx dy \quad (7)$$

A tensão de cisalhamento na parede devido ao atrito pode ser expressa em função do fator de atrito f . Sendo a tensão cisalhante obtida com a expressão:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{f \rho u^2}{2D} \quad (8)$$

Fazendo a conservação do momento, teremos:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = - \frac{f \rho u^2}{2D} - \rho g \sin \theta \quad (9)$$

3.4 CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

A terceira equação representa o princípio de conservação da energia aplicado a um fluido newtoniano. Utilizando o balanço de energia para um sistema fechado $\Delta E = \delta Q - \delta W$, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} (e) dV + \int_A (e + pv) \rho \vec{U} \cdot d\vec{A} = \dot{Q}_{liq} + \dot{W}_{liq} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} (e) dV + \int_{VC} \frac{\partial}{\partial x} (e + pv) \rho u dV \\ = - \frac{U_g A_{sup} (T - T_{ref})}{A_{seção}} + \frac{\partial p u}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy} u}{\partial y} \end{aligned} \quad (11)$$

Para o cálculo da transferência de calor das paredes da tubulação é desprezado a energia armazenada na parede da tubulação e nas camadas de isolamento térmico. A entalpia h de uma substância é $h = e + p/\rho$, substituindo na equação (11):

$$\frac{\partial(h\rho)}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \rho u \frac{\partial h}{\partial x} - u \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{4U_g(T_{ref}-T_e)}{D} + \frac{f\rho u_m^2}{2D}u \quad (12)$$

Vemos que a queda de pressão devido ao cisalhamento na parede do escoamento é $W = \frac{f\rho u_m^2}{2D}$, sendo u_m a velocidade média do fluido sobre a seção transversal da tubulação, onde:

$$u_m = \frac{\dot{m}}{\rho A} \quad (13)$$

3.5 FATOR DE ATRITO

O coeficiente de atrito é responsável pela força de atrito entre o fluido e a parede do tubo. O fator de atrito f para uma tubulação é comumente denotado pelo fator de atrito de Darcy e Weisbach, sendo definido como:

$$f = \frac{-dp/dx}{\frac{1}{2}\rho u^2} D \quad (14)$$

Este é um parâmetro semi-empírico, para o fluxo em tubulações com elevada intensidade de turbulência sendo impossível calcular totalmente por simulações computacionais. O fator de atrito de Darcy f , depende do número de Reynolds $Re = \rho UD/\mu_{fl}$ e da rugosidade relativa da tubulação e/D , segundo Fox e McDonalds (1995).

- Escoamento laminar: $f = \frac{64}{Re}$ para $Re \leq 2300$
- Escoamento turbulento: $f = 0,25 \left[\log \left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{5,74}{Re^{0.9}} \right) \right]^{-2}$ para $Re > 2300$

3.6 MODELO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

O coeficiente de transferência de calor global de U_g é definido por:

$$U_g = \frac{Q}{A(T_i - T_e)} \quad (15)$$

Q é o fluxo de calor e T_i e T_e são as temperaturas internas e externas da tubulação. O coeficiente total de transferência de calor para uma tubulação que consiste em várias camadas da parede, onde não ocorre acumulação de calor no solo:

$$U_g = \left[\frac{1}{h_e} + \frac{r_e}{r_i} \frac{1}{h_i} + \sum_{n=1}^N \frac{r_e}{k_n} \ln \left(\frac{r_n}{r_{n-1}} \right) \right]^{-1} \quad (16)$$

3.7 MODELAGEM DE UM FLUIDO COMPRESSIVEL

Sabemos que a entalpia de um gás é expressa por:

$$dh = C_p dT + \left[\frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p + 1 \right] \frac{dp}{\rho} \quad (17)$$

Dessa forma podemos reescrever a equação de conservação de energia (12):

$$\rho C_p \left(\frac{dT}{dt} + u \frac{dT}{dx} \right) + \left(\frac{dp}{dt} + u \frac{dp}{dx} \right) \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \frac{4U_g(T_i - T_e)}{D} + W \cdot u \quad (18)$$

As equações da continuidade e da energia podem ser reescrita com pressão, velocidade e temperatura como variáveis dependentes, utilizando a equação de estado para um gás $p = Z\rho RT$, onde Z é o fator de compressibilidade do gás.

Aplicando o logaritmo natural nessa expressão e diferenciando ambos os lados, $\ln p = \ln \rho + \ln Z + \ln R + \ln T$, teremos:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{p}{Z} \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{p}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{p} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\rho}{Z} \frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{\rho}{T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (20)$$

Sendo o fator de compressibilidade $Z = Z(p, T)$, logo $dZ = \left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_p dT$,

Podemos reescrever as equações (19) e (20):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial p} \right)_T \right) \frac{\partial p}{\partial t} - \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_p \right) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (21)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial p} \right)_T \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{p}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_p + \frac{p}{T} \right) \frac{\partial T}{\partial x} \quad (22)$$

Substituindo na equação da continuidade (2) e isolando a variável temporal temos:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial p} \right)_T \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \right] \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_p \right)^{-1} \quad (23)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \left[\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_p \right) \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} \right] \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial p} \right)_T \right)^{-1} \quad (24)$$

Substituindo equações (23) e (24) na equação da energia (11) encontramos:

$$\begin{aligned} & \rho C_p \frac{dT}{dt} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial p} \right)_T \right) + u \rho C_p \frac{dT}{dx} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial p} \right)_T \right) \\ & + \left[\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_p \right) \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} \right] \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \\ & + u \frac{dp}{dx} \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial p} \right)_T \right) \\ & = \left[\frac{4U_g(T_{\text{ref}} - T_0)}{D} + Wu \right] \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial p} \right)_T \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Sabemos que $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = -\frac{\rho}{T} \left(1 + \frac{T}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_p\right)$, Substituindo:

$$\begin{aligned} \rho C_p \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)_T\right) \frac{\partial p}{\partial t} + \rho C_p \frac{\partial u}{\partial x} + u \rho C_p \frac{dT}{dx} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_p\right) \\ - \frac{dp}{dt} \frac{1}{T} \left(1 + \frac{T}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_p\right)^2 - u \frac{dp}{dx} \frac{1}{T} \left(1 + \frac{T}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_p\right)^2 \\ = \left(\frac{4U_g(T_{ref} - T_0)}{D} + Wu\right) \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_p\right) \end{aligned} \quad (26)$$

A entropia é uma função da pressão e da densidade $s = s(p, \rho)$, dessa forma:

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_\rho dp + \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p d\rho \quad (27)$$

Considerando que a entropia seja constante, teremos:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = - \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_p / \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\rho \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\rho \quad (28)$$

Admitindo $T = T(p, \rho)$, temos:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p / \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T \quad (29)$$

Como $C_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p$, então:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\rho = \frac{C_v}{T} = \frac{C_p}{T} - \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \quad (30)$$

Logo:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T^{-1} \quad (31)$$

Como $v = 1/\rho$, temos então:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\rho = \left[\frac{C_p}{T} - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p^2\right] \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T^{-1} \quad (32)$$

Como:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = -\frac{\rho}{T} \left(1 + \frac{T}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_p\right) \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = \frac{\rho}{p} \left(1 - \frac{p}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)_p\right) \quad (34)$$

Substituindo as equações (33) e (34) na equação (32) teremos:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\rho = \frac{C_p}{T} - \frac{1}{\rho^2} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T^{-1}\right] \quad (35)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \left\{ \frac{\rho}{p} \left[\left(1 - \frac{p}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)_p\right) - \frac{p}{\rho C_p T} \left(1 + \frac{T}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_p\right)^2 \right] \right\}^{-1} \quad (36)$$

A velocidade da onda isentrópica a_s é igual a $a_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s^{\frac{1}{2}}$, substituindo na equação acima temos:

$$a_s^2 = \left\{ \frac{\rho}{p} \left[\left(1 - \frac{p}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)_p\right) - \frac{p}{\rho C_p T} \left(1 + \frac{T}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_p\right)^2 \right] \right\}^{-1} \quad (37)$$

Podemos então reescrever as equações (27) e (28), e teremos as equações hiperbólicas:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + u \frac{dp}{dx} + \rho a_s^2 \frac{\partial u}{\partial x} & \quad (38) \\ & = \frac{a_s^2}{C_p T} \left(\frac{4U_g(T_i - T_e)}{D} + Wu \right) \left(1 + \frac{T}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_p \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial p} \right)_T \right) + \frac{a_s^2}{C_p} \frac{\partial u}{\partial x} \left(1 + \frac{T}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_p \right) & \quad (39) \\ & = \frac{a_s^2}{C_p p} \left[\frac{4U_g(T_{ref} - T_0)}{D} + Wu \right] \left(1 - \frac{p}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial p} \right)_T \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{W}{\rho} - g \sin \theta \quad (40)$$

As equações (38), (39) e (40) formam um sistema de equações diferenciais parciais do tipo hiperbólico, cuja solução analítica exata não é disponível, contudo, desprezando ou linearizando os termos não lineares, e utilizando diversos métodos gráficos, analíticos e numéricos podemos encontrar a uma solução aproximada.

3.8 MODELO MATEMÁTICO

As equações que descrevem o fluxo podem ser escritas na forma matricial:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x + \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (41)$$

Sendo $U_T = \frac{\partial U}{\partial t}$ e $U_X = \frac{\partial U}{\partial x}$, onde t e x denotam as derivadas parciais em relação ao tempo e à distância, respectivamente.

Para facilitar a modelagem podemos utilizar $Z=1$ para Gás Natural, pois foi observado experimentalmente que o comportamento das variáveis, à baixa

densidade, é representado com bastante precisão. A densidade do Gás Natural é relativamente inferior a 1,0, sendo, portanto, mais leve que o ar.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} p \\ u \\ T \end{pmatrix} \quad (42)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & \rho a_s^2 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & u & 0 \\ 0 & \frac{a_s^2}{C_p} & u \end{pmatrix} \quad (43)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -\frac{a_s^2}{C_p T} \left[\frac{4U_g(T_{ref} - T_e)}{D} + Wu \right] \\ \frac{W}{\rho} + g \operatorname{sen} \theta \\ -\frac{a_s^2}{C_p p} \left[\frac{4U_g(T_{ref} - T_e)}{D} + Wu \right] \end{pmatrix} \quad (44)$$

Vários métodos diferentes de solução para as equações gerais têm sido desenvolvidos. A seguir teremos um breve resumo dos modelos mais populares.

4 MODELOS NUMERICO

4.1 MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

As equações que descrevem o fluxo, convertidas para as coordenadas naturais do sistema, são conhecidas como equações características. As equações características resultantes obtidas são resolvidas numericamente de cada grade de características ou numa malha retangular de coordenadas.

Os valores próprios λ da matriz \mathbf{A} são:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u \\ \lambda_2 &= u + a_s \\ \lambda_3 &= u - a_s \end{aligned}$$

As equações características são as seguintes:

- Para $\lambda_1 = u$, temos: $\frac{dx}{dt} = u$:

$$-\frac{1}{\rho C_p} \frac{dp}{dt} + \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\rho C_p} \left(\frac{4U_g(T_{ref} - T_e)}{D} + Wu \right) = 0 \quad (45)$$

- Para $\lambda_2 = u + a_s$, temos: $\frac{dx}{dt} = u + a_s$

$$\frac{1}{\rho a_s} \frac{dp}{dt} + \frac{du}{dt} - \frac{a_s}{\rho C_p T} \left(\frac{4U_g(T_{ref} - T_e)}{D} + Wu \right) + \frac{W}{\rho} + g \sin \theta = 0 \quad (46)$$

- Para $\lambda_3 = u - a_s$, temos: $\frac{dx}{dt} = u - a_s$

$$-\frac{1}{\rho a_s} \frac{dp}{dt} + \frac{du}{dt} + \frac{a_s}{\rho C_p T} \left(\frac{4U_g(T_{ref} - T_e)}{D} + Wu \right) + \frac{W}{\rho} + g \sin \theta = 0 \quad (47)$$

As equações podem ser resolvidas simultaneamente para as quatro incógnitas p , u , x , t . A principal vantagem do método é que as descontinuidades podem ser tratadas e que grandes intervalos de tempo são possíveis desde que eles não sejam limitados por um critério de estabilidade. No entanto, este método tem uma desvantagem importante quando lida com gases transientes rápidos.

4.2 MÉTODO DE DIFERENCIAIS FINITAS EXPLÍCITAS

Para resolver as equações básicas usando uma diferença finita explícita, método que deve primeiro ser escrita na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(A) + \frac{\partial}{\partial x}(B) = C \quad (48)$$

O método de diferenças finitas explícito mais simples é a frente método de Euler. Aplicando este método na Equação (12) e assumindo que C é igual a zero, teremos a seguinte aproximação:

$$A_{(i,j+1)} = A_{(i,j)} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (B_{(i,j+1)} - B_{(i-1,j)}) \quad (49)$$

Este método não mostra nenhum erro de amplitude e requer apenas uma avaliação do valor de B em cada ponto de nó. No entanto, quando C não é igual a zero, torna-se incondicionalmente instável, e recuperar a estabilidade dos cálculos tornam-se mais complicado. Uma grande desvantagem dos métodos de diferenças finitas explícitas é que, na melhor das hipóteses, são apenas condicionalmente estáveis.

4.3 MÉTODOS DE DIFERENÇAS FINITAS IMPLÍCITAS

O método de diferenças finitas implícitos têm a vantagem sobre o método explícito de ser incondicionalmente estável. Em geral, os esquemas de diferenças finitas implícitos são mais econômicos do que os esquemas de diferenças finitas explícito ou do método das características, embora este último pode atingir mais resultados precisos. Pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{A_{(i+1,j)} - A_{i,j}}{\Delta t} + \frac{B_{(i+1,j+1)} - B_{(i+1,j-1)}}{2\Delta x} = C_{i+1,j} \quad (50)$$

4.4 MÉTODO DE CRANK-NICOLSON

O método é uma solução de diferença central com precisão de alta ordem. Utiliza-se este método por ser mais fácil de programar e calcular muito mais rapidamente podendo ser prontamente estendida a tubulações de qualquer tamanho.

$$\frac{A_{(i+1,j)} - A_{i,j}}{\Delta t} + \frac{(B_{(i,j+1)} - B_{(i,j-1)}) + (B_{(i+1,j+1)} - B_{(i+1,j-1)})}{4\Delta x} = C_{i+1,j} \quad (51)$$

4.5 MÉTODO DE DIFERENÇA CENTRADA

O método de diferença centrada é utilizado para resolver fluxos transientes isotérmicos em uma rede. Neste método, as derivadas parciais são calculadas para seções do gasoduto em vez de pontos de nó. Este método requer uma grande quantidade de armazenamento de computador para lidar com a matriz de coeficientes, e o tempo de execução é demorado.

$$\begin{aligned} & \frac{(A_{(i+1,j+1)} - A_{i,j+1}) + (A_{(i+1,j)} - A_{i,j})}{\Delta t} & (52) \\ & + \frac{(B_{(i+1,j+1)} - B_{(i,j+1)}) + (B_{(i,j+1)} - B_{(i,j)})}{\Delta x} \\ & = \frac{C_{i,j+1} + C_{i,j} + C_{i+1,j+1} + C_{i,j+1}}{2} \end{aligned}$$

5 MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS (MVF)

O método dos volumes finitos é um método de resolução de equações das derivadas parciais baseado na resolução de balanços de massa, energia e quantidade de movimento a um determinado volume de meio contínuo. Este método evoluiu das diferenças finitas, porém não apresenta problemas de instabilidade ou convergência, por garantir que, em cada volume discretizado, a propriedade em questão obedece à lei da conservação.

Este método é largamente utilizado na resolução de problemas envolvendo transferência de calor ou massa e em mecânica dos fluidos, pois determina os campos de velocidade, pressão e temperatura resultantes do escoamento, sendo esta uma das técnicas de discretização mais versáteis utilizadas na dinâmica dos fluidos computacional.

Esta técnica tem como primeiro passo dividir o domínio computacional em vários volumes de controle, onde a variável de interesse está localizada no centroide do volume de controle. O próximo passo é integrar a forma diferencial das equações de governo sobre cada volume de controle, onde são utilizados perfis de interpolação para descrever a variação da variável procurada, entre os centroides de cada volume de controle. A equação resultante é chamada de equação de

discretização. Desta forma, a equação de discretização expressa o princípio da conservação para a variável procurada dentro do volume de controle.

A característica mais atraente do MVF é que a solução resultante satisfaz a conservação de quantidades como massa, quantidade de movimento, energia e espécies, sendo totalmente satisfeita para qualquer volume de controle, assim como para todo o domínio computacional e qualquer número de volumes de controle.

5.1 EQUAÇÃO DE TRANSPORTE

As equações mais frequentes em mecânica de fluidos expressam os princípios de conservação e definem um balanço entre os vários modos de transporte e o termo transiente referente à uma variável de interesse. Esta variável dependente representa uma grandeza física intensiva. Para a representação destes fenômenos de transporte pode-se utilizar uma equação diferencial parcial na qual a variável dependente será dada pela variável genérica ϕ . A partir desta, pode-se construir todas as equações diferenciais presentes neste trabalho. Esta equação diferencial escrita na forma conservativa em notação vetorial é:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U\phi) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S_b \quad (53)$$

onde Γ representa o coeficiente de difusão e S_b o termo fonte e é considerado como sendo a soma do termo de geração com todos os outros termos existentes na equação de conservação original que não se enquadram nem na forma de termos de transporte e nem na de termo de acúmulo, por isso, é por vezes, chamado de "lixeria" da equação de conservação.

Na equação, o primeiro termo representa a variação temporal da quantidade total da grandeza $\rho\phi$ no volume de controle, o segundo termo representa a variação devido ao transporte convectivo, o terceiro termo representa a variação devido ao transporte difusivo, e o último é responsável pela geração ou destruição da entidade por unidade volume.

5.2 EQUAÇÃO DE DISCRETIZAÇÃO

Para a representação destes fenômenos pode-se utilizar uma equação de transporte (52) e a partir desta, pode-se construir todas as equações diferenciais presentes neste trabalho.

A equação discretizada é uma expressão *exata* para a conservação de massa no volume em questão, pois a forma de cálculo dos fluxos médios através das faces e das densidades médias no volume ainda não foi especificada. A aproximação destas grandezas utilizando seus valores em pontos discretos da malha e em um dado instante de tempo é que introduz o erro da aproximação numérica.

A figura 5-1 mostra a estrutura básica de uma malha unidimensional de volumes finitos. Usualmente, os valores das variáveis dependentes são armazenados nos centros dos volumes (P , W , E) ou nos centros de determinadas faces (w , e). Os valores necessários destas variáveis em outras posições são obtidos por processos convenientes de interpolação. Em um mesmo problema, algumas das variáveis dependentes podem ser armazenadas nos centros dos volumes, enquanto que outras ficam armazenadas em pontos sobre as faces. Assim, o método de volumes finitos pode utilizar várias malhas para um mesmo problema (malhas entrelaçadas).

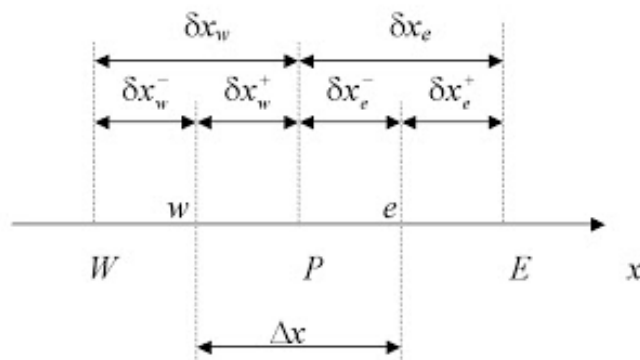


Figura 5-1 Estrutura básica de uma malha unidimensional de volumes finitos

A equação de transporte para um fluxo unidimensional é escrita abaixo. Todas as equações de conservação têm a forma desta equação:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\phi u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \right) + S_c + S_b\phi \quad (54)$$

Sendo $S_b = S_c + S_b\phi$;

A discretização das equações de governo do escoamento pode ser obtida integrando a Equação (54) em um volume de controle \forall limitado por uma superfície fechada S . Aplicando o teorema de divergência de Gauss, tem-se:

$$\int_{\forall} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} d\forall + \int_{\forall} \rho\phi u_j n_j d\forall = \int_{\forall} \Gamma_{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial x_j} n_j d\forall + \int_{\forall} (S_c + S_b\phi) d\forall \quad (55)$$

Onde n_j é o vetor normal à superfície do volume de controle (apontando para fora do elemento), e dA é a magnitude do elemento de área da superfície de controle.

5.3 CÁLCULO DOS COEFICIENTES

Para encontrar os coeficientes, reescrevemos a equação (37), admitindo que $Z=1$:

$$pC_p \frac{\partial T}{\partial t} + pC_p u \frac{\partial T}{\partial x} + pa_s^2 \frac{\partial u}{\partial x} = S_c + S_b T \quad (56)$$

Com: $S_c = a_s^2 \left(\frac{4U_g T_0}{D} + Wu \right)$ e $S_b = a_s^2 \left(\frac{4U_g T_0}{D} + Wu \right)$

Integrando a equação acima no volume de controle e no tempo sobre um intervalo de tempo de t até $t + \Delta t$, temos:

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \int_{V_c} pC_p \frac{\partial T}{\partial t} dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{V_c} pC_p u \frac{\partial T}{\partial x} dV dt \\ & + \int_t^{t+\Delta t} \int_{V_c} pa_s^2 \frac{\partial u}{\partial x} dV dt \\ & = \int_t^{t+\Delta t} \int_{V_c} (S_c + S_b T) dV dt \end{aligned} \quad (57)$$

Sendo A a área da seção transversal do volume de controle, V_c o volume. Como $dV = Adx$, sendo dx é o comprimento do volume de controle, temos:

$$\begin{aligned}
& \int_{V_c} \left(\int_t^{t+\Delta t} pC_p \frac{\partial T}{\partial t} dt \right) dV \\
& + \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(pC_p u A \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(pC_p u A \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] dx dt \\
& + \int_t^{t+\Delta t} \int_{V_c} p a_s^2 \left(\frac{u_e - u_w}{\Delta x} \right) A dx dt \\
& = \left(\int_t^{t+\Delta t} (S_c + S_b T) dt \right) \Delta V
\end{aligned} \tag{58}$$

A integral I_T é resolvida por:

$$I_T = \int_t^{t+\Delta t} T_P dt = [\theta T_P^{j+1} + (1 - \theta)] T_P^j \Delta t \tag{59}$$

Onde θ é a função peso sendo $\theta = 0$ para o método explícito, $\theta = 1/2$ para o método Crank- Nicolson e $\theta = 1$ para o método implícito. Então:

- $\int_{V_c} \left(\int_t^{t+\Delta t} pC_p \frac{\partial T}{\partial t} dt \right) dV = pC_p (T_P^{j+1} - T_P^j) \Delta V$
- $\int_t^{t+\Delta t} \left[\left(pC_p u A \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(pC_p u A \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(pC_p u A \frac{T_E - T_P}{\Delta x} \right)_e - \left(pC_p u A \frac{T_P - T_W}{\Delta x} \right)_w \right] dt$
- $\int_t^{t+\Delta t} \int_{V_c} p a_s^2 \frac{\partial u}{\partial x} dV dt = \int_t^{t+\Delta t} p a_s^2 A (u_e - u_w) dt$
- $\left(\int_t^{t+\Delta t} (S_c + S_b \phi) dt \right) \Delta V = [S_c + S_b (\theta T_P^{j+1} + (1 - \theta) T_P^j)] A \Delta x \Delta t$

$$\begin{aligned}
& pC_p (T_P^{j+1} - T_P^j) A \frac{\Delta x}{\Delta t} \\
& = \theta \left[\left(pC_p u A \right)_e \frac{T_E^{j+1} - T_P^{j+1}}{\Delta x} - \left(pC_p u A \right)_w \frac{T_P^{j+1} - T_W^{j+1}}{\Delta x} \right] \\
& + (1 - \theta) \left[\left(pC_p u A \right)_e \frac{T_E^j - T_P^j}{\Delta x} - \left(pC_p u A \right)_w \frac{T_P^j - T_W^j}{\Delta x} \right] \\
& - p a_s^2 A (u_e - u_w) + [S_u^* + S_p^* (\theta T_P^{j+1} + (1 - \theta) T_P^j)] A \Delta x
\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
& \left[pC_p A \frac{\Delta x}{\Delta t} + \theta \left[\frac{(pC_p u A)_e}{\Delta x} + \frac{(pC_p u A)_w}{\Delta x} \right] + S_b(\theta A \Delta x) \right] T_p^{j+1} \\
& = \frac{(pC_p u A)_e}{\Delta x} [\theta T_E^{j+1} + (1 - \theta) T_E^j] \\
& + \frac{(pC_p u A)_w}{\Delta x} [\theta T_W^{j+1} + (1 - \theta) T_W^j] \\
& + \left[pC_p A \frac{\Delta x}{\Delta t} - (1 - \theta) \frac{(pC_p u A)_e}{\Delta x} - (1 - \theta) \frac{(pC_p u A)_w}{\Delta x} \right. \\
& \left. + S_c((1 - \theta) A \Delta x) \right] T_p^j + S_b A \Delta x - p a_s^2 A (u_e - u_w)
\end{aligned} \tag{61}$$

Na forma padrão:

$$\begin{aligned}
a_p T_p^{j+1} & = a_E [\theta T_E^{j+1} + (1 - \theta) T_E^j] + a_W [\theta T_W^{j+1} + (1 - \theta) T_W^j] \\
& + [a_p^j - (1 - \theta) a_E - (1 - \theta) a_W] T_p^j + S_u
\end{aligned} \tag{62}$$

Coefficientes:

$$a_p^j = pC_p A \frac{\Delta x}{\Delta t};$$

$$a_p = a_p^j + \theta(a_E + a_W) - S_p^{j+1}$$

$$a_E = \frac{(pC_p u A)_e}{\Delta x}$$

$$a_W = \frac{(pC_p u A)_w}{\Delta x}$$

$$S_u = S_c A \Delta x - p a_s^2 A (u_e - u_w)$$

$$S_p^{j+1} = S_b \theta A \Delta x$$

$$S_p^j = S_b (1 - \theta) A \Delta x$$

Para uma condição de contorno prescrita na fase w , isto é, $T_w = T_A$

$$\begin{aligned}
 & \rho C_p (T_p^{j+1} - T_p^j) A \frac{\Delta x}{\Delta t} \\
 & = \theta \left[(pC_p uA)_e \frac{T_E^{j+1} - T_p^{j+1}}{\Delta x} - (pC_p uA)_w \frac{T_p^{j+1} - T_A}{\Delta x/2} \right] \\
 & + (1 - \theta) \left[(pC_p uA)_e \frac{T_E^j - T_p^j}{\Delta x} - (pC_p uA)_w \frac{T_p^j - T_A}{\Delta x/2} \right] \\
 & - pa_s^2 A (u_e - u_w) \\
 & + [S_c + S_b(\theta T_p^{j+1} + (1 - \theta)T_p^j)] A \Delta x
 \end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ C_p A \frac{\Delta x}{\Delta t} + \theta \left[\frac{(C_p uA)_e}{\Delta x} + 2 \frac{(C_p uA)_w}{\Delta x} \right] + S_b(\theta A \Delta x) \right\} T_p^{j+1} \\
 & = \frac{(C_p uA)_e}{\Delta x} [\theta T_E^{j+1} + (1 - \theta)T_E^j] + 2 \frac{(C_p uA)_w}{\Delta x} T_A \\
 & + \left[C_p A \frac{\Delta x}{\Delta t} - (1 - \theta) \frac{(C_p uA)_e}{\Delta x} - (1 - \theta) 2 \frac{(C_p uA)_w}{\Delta x} \right. \\
 & \left. + S_b((1 - \theta)A \Delta x) \right] T_p^j + S_c A \Delta x - pa_s^2 A (u_e - u_w)
 \end{aligned} \tag{64}$$

Coeficientes:

$$a_p^j = C_p A \frac{\Delta x}{\Delta t};$$

$$a_p = a_p^j + \theta(a_E + a_w) - S_p^{j+1}$$

$$a_E = \frac{(pC_p uA)_e}{\Delta x}$$

$$a_w = 0$$

$$S_u = S_c A \Delta x + 2 \frac{(C_p uA)_w}{\Delta x} T_A - pa_s^2 A (u_e - u_w)$$

$$S_p^{j+1} = -\theta \frac{2(pC_p uA)_w}{\Delta x}$$

$$S_p^j = (1 - \theta) \frac{2(pC_p uA)_w}{\Delta x}$$

Esses coeficientes são necessários para fazer simulações computacionais do escoamento do gás e com estas simulações, é possível obter os pontos críticos do sistema, que auxiliam na escolha dos equipamentos de segurança a serem usados no projeto.

6 GOLPE DE ARÍETE

Denomina-se Golpe de Aríete ao choque violento produzido sobre as paredes de um conduto forçado quando o movimento do líquido se modifica de forma brusca. Mais precisamente se traduz na sobrepressão que as tubulações recebem quando, por exemplo, se fecha um registro, interrompendo-se o escoamento.

Por Golpe de Aríete são conhecidas as variações de pressão oriundas de variações da vazão, causadas por algum tipo perturbação, seja voluntária ou involuntária, que se imponha ao fluxo de líquidos em condutos, tais como: operações de abertura ou fechamento de válvulas, falhas mecânicas de dispositivos de proteção e controle, parada de turbinas hidráulicas e ainda de bombas causadas por queda de energia no motor, havendo, no entanto, outros tipos de causas.

No desenvolvimento do fenômeno, a pressão poderá atingir níveis indesejáveis, que poderão causar sérios danos ao conduto ou avarias nos dispositivos nele instalados, podendo resultar em acidentes.

6.1 PRINCÍPIOS TEÓRICOS

6.1.1 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

A lei de conservação da massa pode ser reformulada em termos da área na seguinte forma:

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_A \rho \bar{U} \cdot d\bar{A} \quad (65)$$

$$\int_{VC} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U)\right) dV = \frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial \rho u A}{\partial x} = 0 \quad (66)$$

Incluindo a pressão p , teremos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho}{A} \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho u}{A} \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (67)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{\rho}{A} \frac{\partial A}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{\rho}{A} \frac{\partial A}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (68)$$

O último termo da equação é referente a equação da onda acústica, (Ghidaoui S, 2005).

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{\rho}{A} \frac{\partial A}{\partial p} = \frac{1}{a^2} \quad (69)$$

Sendo a velocidade de onda acústica por Chaudhry:

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho[1 + (KD/Ee)]}} \quad (70)$$

Reescrevendo a equação (69):

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (71)$$

6.1.2 EQUAÇÃO DO MOMENTO:

$$\vec{F}_{campo} + \vec{F}_{superfície} = \int_{VC} \frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} dV + \int_{VC} \frac{\partial \rho u}{\partial x} \vec{U} dV \quad (72)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} - \tau_{xy} - \rho g \sin \theta \quad (73)$$

Para estes casos, desconsidera-se os efeitos da gravidade, utiliza-se um modelo de fricção proposto em termos do fator de atrito de Darcy-Weisbach, e uma relação constitutiva para descrever a perda de carga associada a tensões nas paredes do tubo. (Brunone B, 2000)

$$\tau_{xy} = \frac{f \rho u^2}{2D} + k \left(\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (74)$$

Substituindo na equação (73) teremos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{u - ka}{1 + k} \right) + \frac{1}{\rho(1 + k)} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{(1 + k)} \frac{f u^2}{2D} = 0 \quad (75)$$

6.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Para a análise deve-se resolver simultaneamente as equações da continuidade e da quantidade de movimento, equações que fornecem a pressão e as velocidade numa determinada posição da tubulação em função do tempo.

As equações que descrevem o fluxo podem ser escritas na matriz formando assim:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{B}U_x + \mathbf{D} = 0 \quad (76)$$

Onde:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} p \\ u \end{Bmatrix} = -[B(p, u)] \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} p \\ u \end{Bmatrix} - [D(p, u)]$$

onde t e x denotam as derivadas parciais em relação ao tempo e à distância, respectivamente, temos:

$$\mathbf{U}_t = \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} \quad (77)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} u & \rho a^2 \\ \rho(1 + k) & \left(\frac{u - ka}{1 + k} \right) \end{pmatrix} \quad (78)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{fu^2}{(1+k)2D} \end{pmatrix} \quad (79)$$

Utilizando a velocidade com sendo a velocidade média, utilizando o esquema proposto por Godunov (ITS, 2011), temos:

$$\mathbf{B} \approx \begin{pmatrix} u_m & \rho a^2 \\ \rho(1+k) & \left(\frac{u-ka}{1+k}\right) \end{pmatrix} \quad (80)$$

6.2.1 DISCRETIZAÇÃO PELO MÉTODOS DOS VOLUMES FINITOS

Integrando a equação (76) no volume de controle e no tempo sobre um intervalo de tempo de t até $t + \Delta t$:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial U}{\partial t} dV dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e B \frac{\partial U}{\partial x} dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e D dV dt \quad (81)$$

$$\int_w^e \left(\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial U}{\partial t} dt \right) dV = \int_t^{t+\Delta t} [(BAU)_e - (BAU)_w] dt + \int_t^{t+\Delta t} D dt \Delta V \quad (82)$$

- $\int_w^e \left(\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial U}{\partial t} dt \right) dV = U_p^{j+1} - U_p^j$
- $\int_t^{t+\Delta t} [(BAU)_e - (BAU)_w] dt = \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(BA \frac{U_E + U_P}{2} \right)_e - \left(BA \frac{U_P + U_W}{2} \right)_w \right] dt$

$$= \theta \left[(BA)_e \frac{U_E^{j+1} + U_P^{j+1}}{2} - (BA)_w \frac{U_P^{j+1} + U_W^{j+1}}{2} \right] + (1 - \theta) \left[(BA)_e \frac{U_E^j + U_P^j}{2} - (BA)_w \frac{U_P^j + U_W^j}{2} \right]$$

- $\int_t^{t+\Delta t} D dt \Delta V = \bar{D} A \Delta x$

Sendo \bar{D} o valor médio no volume de controle da fonte.

$$\begin{aligned}
& (U_P^{j+1} - U_P^j)A \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{83} \\
& = \theta \left[(BA)_e \frac{U_E^{j+1} - U_P^{j+1}}{\Delta x} - (BA)_w \frac{U_P^{j+1} - U_W^{j+1}}{\Delta x} \right] \\
& + (1 - \theta) \left[(BA)_e \frac{U_E^j - U_P^j}{\Delta x} - (BA)_w \frac{U_P^j - U_W^j}{\Delta x} \right] + \bar{S}A\Delta x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[A \frac{\Delta x}{\Delta t} + \theta \left[\frac{(BA)_e}{\Delta x} + \frac{(BA)_w}{\Delta x} \right] \right] U_P^{j+1} \tag{84} \\
& = \frac{(BA)_e}{\Delta x} [\theta U_E^{j+1} + (1 - \theta)U_E^j] \\
& + \frac{(BA)_w}{\Delta x} [\theta U_W^{j+1} + (1 - \theta)U_W^j] \\
& + \left[A \frac{\Delta x}{\Delta t} - (1 - \theta) \frac{(BA)_e}{\Delta x} - (1 - \theta) \frac{(BA)_w}{\Delta x} \right] U_P^j \\
& + [S_c + S_b(\theta U_P^{j+1} + (1 - \theta)U_P^j)]A\Delta x
\end{aligned}$$

Logo:

$$a_P^j = A \frac{\Delta x}{\Delta t};$$

$$a_P = a_P^j + \theta(a_E + a_W) - S_P$$

$$a_E = \frac{(BA)_e}{\Delta x}$$

$$a_W = \frac{(BA)_w}{\Delta x}$$

$$S_u = S_c A \Delta x$$

Para volumes internos $S_P = 0$ e $S_P^j = 0$

Para uma condição de contorno prescrita na fase w , isto é, $U_W = U_A$

$$(U_P^{j+1} - U_P^j)A \frac{\Delta x}{\Delta t} = \theta \left[(BA)_e \frac{U_E^{j+1} - U_P^{j+1}}{\Delta x} - (BA)_w \frac{U_P^{j+1} - U_A}{\Delta x/2} \right] + (1 - \theta) \left[(BA)_e \frac{U_E^j - U_P^j}{\Delta x} - (BA)_w \frac{U_P^j - U_A}{\Delta x/2} \right] + \bar{S}A\Delta x \quad (85)$$

$$\begin{aligned} & \left[A \frac{\Delta x}{\Delta t} + \theta \left[\frac{(BA)_e}{\Delta x} + 2 \frac{(BA)_w}{\Delta x} \right] \right] U_P^{j+1} \\ &= \frac{(BA)_e}{\Delta x} [\theta U_E^{j+1} + (1 - \theta) U_E^j] + 2 \frac{(BA)_w}{\Delta x} U_A \\ &+ \left[A \frac{\Delta x}{\Delta t} - (1 - \theta) \frac{(BA)_e}{\Delta x} - (1 - \theta) \frac{(BA)_w}{\Delta x} \right] U_P^j \\ &+ \bar{S}A\Delta x \end{aligned} \quad (86)$$

Coefficientes:

$$a_P^j = A \frac{\Delta x}{\Delta t};$$

$$a_P = a_P^j + \theta(a_E + a_W) - S_P$$

$$a_E = \frac{(BA)_e}{\Delta x}$$

$$a_W = 0$$

$$S_u = S_c A \Delta x + 2 \frac{(BA)_w}{\Delta x} U_A$$

$$S_p^{j+1} = -\theta \frac{2(BA)_w}{\Delta x}$$

$$S_p^j = (1 - \theta) \frac{2(BA)_w}{\Delta x}$$

Assim como no caso do gás, esses coeficientes são necessários para fazer simulações computacionais do escoamento e com estas simulações, é possível obter os pontos críticos do sistema, onde ocorrerão o golpe de aríete. Sendo possível, prever possíveis falhas e então, melhorar o projeto.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A modelagem matemática do transporte de um fluido em tubulações é de grande importância, pois permite uma modelagem numérica para uma aproximação das equações que regem o fluxo, possibilitando assim a elaboração de um modelo computacional.

Este trabalho abre frentes para futuras ampliações, como: simulações computacionais, implementação, verificação e monitoramento de componentes de segurança de sistemas e ainda a minimização do tempo computacional.

8 REFERÊNCIAS

1. BRUNONE, B. **Velocity Profiles and Unsteady Pipe Friction in Transient Flow**. Disponível em: <[http://ascelibrary.org/doi/full/10.1061/\(ASCE\)0733-9496\(2000\)126:4\(236\)#aHR0cDovL2FzY2VsaWJyYXJ5Lm9yZy9kb2kvcGRmLzEwLjEwNjEvKEFTQ0UpMDczMy05NDk2KDlwMDApMTI2OjQoMjM2KUBAQDA=>](http://ascelibrary.org/doi/full/10.1061/(ASCE)0733-9496(2000)126:4(236)#aHR0cDovL2FzY2VsaWJyYXJ5Lm9yZy9kb2kvcGRmLzEwLjEwNjEvKEFTQ0UpMDczMy05NDk2KDlwMDApMTI2OjQoMjM2KUBAQDA=>)>. Acesso em: 9 de jan. 2016.
2. CHAUDHRY, M. H. **Applied Hydraulic Transients**. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 2ª Ed, 1987.
3. FOX, R. W.; MCDONALD, A. T. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**, Livros Técnicos e Científicos Editora, 5a. Ed. 2001.
4. GHIDAQUI, M. S.; **A Review of Water Hammer Theory and Practice**. Disponível em: <http://hydraulics.unibs.it/hydraulics/wp-content/uploads/2012/04/A_review_of_water_hammer_theory_and_practice.pdf>. Acesso em: 16 jan. 2016.
5. HELGAKER, J. F.; OOSTERKAMP, A.; LANGELANDSVIK, L. I.; YTREHUS, T. **Validation of 1D flow model for high pressure offshore natural gas**.
6. INCROPERA, F.P.; DEWITT, D.P. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**, 3a edição, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., R. J. 1990.
7. PATANKAR, S. V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. Disponível em: <<http://www.ewp.rpi.edu/hartford/~ernesto/F2012/CFD/Readings/Patankar-NHTFF-1980.pdf>>. Acesso em: 9 nov. 2015.
8. PROSCHOLDT, A. de O.; XAVIER, F. **Modelagem Computacional de Escoamentos utilizando o método de Volumes Finitos**, 2011.
9. SAENZ, J. S. R. **Introdução ao escoamento em dutos (1D)**. Universidade Federal do Espírito Santo, Departamento de Engenharia Mecânica.

10. STREETER, V. L.; WYLIE, W. B. **Fluid Transients. McGraw-Hill International, 1978. Pipelines.** Universidade Norueguesa de Ciência e Tecnologia, Departamento de Energia e Engenharia de Processos.

11. THORLEY, A. R. D; TILEY, C.H. **Unsteady and transient flow of compressible fluids in pipelines,** Centro de Pesquisa e Engenharia da Universidade de Londres.

12. VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics,** Longman scientific & Technical.